UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

TEORÍA DE ELEMENTOS FINITOS CON FUNCIONES DISCONTINUAS DEFINIDAS POR TRAMOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
M A E S T R O E N C I E N C I A S D E L A T I E R R A

P R E S E N T A

MAT. AGUSTÍN ALBERTO ROSAS MEDINA

JURADO EXAMINADOR
DR. ISMAEL HERRERA REVILLA
DR. JUAN JOSÉ PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE
DR. ROBERT YATES
DR. MARTÍN DÍAZ VIERA
DR. HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA

MÉXICO D. F., AGOSTO DE 2009

Dedicatoria

A mis Padres, Elvia y Juan que son mi motivación y siempre me han apoyado

A mis Hermanos, que siempre los tengo presente

A mis Sobrin@s, que siempre me reciben muy emotivos y con una dulce sonrisa

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi gratitud al Dr. Ismael Herrera Revilla director de tesis y maestro, por su sabiduría compartida y por todo el apoyo brindado durante estos últimos años. También quiero agradecer a mis sinodales los doctores Martín Díaz Viera, Robert Yates, Héctor Juárez Valencia, Juan José Pérez-Gavilán Escalante, quienes con sus valiosos comentarios y sugerencias me ayudaron a entender y concluir el presente trabajo. A Sandra Luz Morales y Araceli Chaman por su ayuda en todo trámite necesario para concluir este trabajo.

Al Programa de Posgrado de la UNAM, especialmente al Posgrado en Ciencias de la Tierra con sede en el Instituto de Geofísica. A CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios de Maestría. A la UNAM que ha sido mi segunda casa y que cada día debemos aprender a valorar más, a mis amigos del Grupo de Modelación Matemática y Computacional.

A la Coordinación de Posgrado de la UNAM por el apoyo recibido para imprimir esta tesis.

Agustín Alberto Rosas Medina

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una teoría sistemática y verdaderamente general de los métodos de elementos finitos (FEM) puede ser formulada usando funciones base y de peso, funciones definidas por tramos que pueden ser completamente discontinuas a través de la frontera interna, la cual separa los elementos uno de otro. La teoría algebraica de Herrera para problemas de valores de frontera (BVP), implica un tipo de operadores de extensión de gran generalidad; estos operadores usan funciones de base y de peso completamente discontinuas que pueden ser aplicadas simultáneamente, lo cual esto no es posible cuando se usa la teoría estándar de distribuciones. En este trabajo este aspecto de la teoría es discutido y se muestra que los operadores de extensión implicados por la teoría algebraica, corresponden a extensiones de operadores distribucionales. Más precisamente, en situaciones donde el operador distribucional es definido, este coincide con la teoría algebraica.

Sin embargo como ya mencioné, el operador de extensión implicado por la teoría algebraica está bien definido en casos donde la distribucional no lo está. Este es el caso, por ejemplo, cuando las funciones base y de peso son completamente discontinuas.

Como parte importante de este trabajo se realiza una comparación de las formulaciones del método de elemento finito, la formulación Green-Herrera y el Método Discontinuo Galerkin. Para mostrar las diferencias entre estos métodos.Y así mostrar las ventajas de la formulación Green-Herrera para ecuaciones diferenciales.

Tiene interés mencionar que las bases para el tipo de operadores de extensión presentados en este trabajo, es puramente algebraico. El contenido de este trabajo está dedicado a comparar principalmente las extensiones algebraicas con el enfoque distribucional. Gracias a la teoría desarrollada en ([1],[2]) por el Dr. Herrera, la forma de aplicar funciones completamente discontinuas definidas por tramos en la formulación de los elementos finitos es de una manera sistemática y sencilla. Las fórmulas Green-Herrera son la extensión de las derivadas distribucionales aplicadas a funciones completamente discontinuas.

A continuación se da un resumen del contenido de cada Sección

2._ Formulaciones Débiles de Problemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales

En esta sección se plantea el método de residuos pesados como una introducción y base de los métodos de elementos finitos.

3._ Adjuntos Formales de Operadores Diferenciales

En esta sección se da la definición de operadores adjuntos formales para funciones escalares y funciones vectoriales, se desarrollan algunos ejemplos para mostrar dichos operadores. Estos operadores son necesarios para el planteamiento de las fórmulas Green- Herrera que se plantearán en la sección 6.

4._ Derivadas Distribucionales y Espacios de Sobolev

Para poder mostrar que los operadores de extensión dados por las fórmulas de Green-Herrera son una extensión de las derivadas distribucionales, es necesario introducir las definiciones de las derivadas distribucionales en el sentido ordinario como viene dado en la literatura. Por otro lado cuando se hace el planteamiento de las funciones discontinuas definidas por tramos es necesario definir que espacio se necesita para definir las funciones; por ello es necesario introducir los espacios de Sobolev.

5._ Funciones Definidas por Tramos y sus Espacios de Sobolev

En esta sección se dan las bases necesarias para definir las funciones definidas por tramos a partir de hacer una partición en subdominios Ω_i del dominio Ω, y una vez hecha esta partición se definen los espacios de Sobolev para cada subdominio de la partición y entonces se introduce el Teorema de Green generalizado para el dominio Ω como la unión de los Ω_i. Es importante definir el salto y el promedio de la función en la frontera interna Γ, es decir en $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ $i \neq j$. Tanto el salto como el promedio son importantes para el desarrollo de las funciones discontinuas definidas por tramos.

6._ Fórmulas de Green-Herrera

En la teoría están dadas la fórmulas de Green para operadores con funciones continuas, entonces en necesario introducir las fórmulas Green-Herrera como una extensión para operadores en campos con funciones discontinuas.

7._ Relación de las Derivadas Distribucionales y las Fórmulas de Green-Herrera en Espacios $H^2(\Omega)$

En esta sección se muestra ejemplos de operadores diferenciales vistos como derivadas distribcionales a los cuales se les aplica las fórmulas Green-Herrera para mostrar las ventajas de ellas.

8._ Revisión de las Formulaciones FEM, Green-Herrera y DG.

Para mostrar la importancia de las fórmulas Green-Herrera se hace una revisión de los métodos FEM y GD para mostrar las diferencias entre estos métodos.

9._ Interpretación como una Extensión de Operadores

En esta sección se dan las definiciones de los operadores extensión obtenidos a partir de las fórmulas Green-Herrera los cuales involucran el salto y promedio de la función. Además se muestran algunos ejemplos unidimensionales de aplicación de estos operadores a funciones definidas en espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ y $H^2(\Omega)$ comparandolos con las definiciones estándar de las derivadas distribucionales.

10._ Fórmulas Green-Herrera para Matrices y el Operador Steklov-Poincaré

Para finalizar se introduce un resultado obtenido por Herrera ([16]). El cual son las fórmulas de Green-Herrera para matrices a partir del método de descomposición de dominio Dual-Primal.

11._ Conclusiones

Por último las conclusiones al trabajo de tesis

Objetivos Generales

Mostrar de manera general la teoría sistemática de la formulación Green-Herrera, la cual considera funciones de base y de peso completamente discontinuas a través de la frontera interna para la solución de problemas de valores en la frontera. Así también mostrar el desarrollo hecho por Herrera para la solución de ecuaciones diferenciales en particular para el operador elíptico de segundo orden, una vez que se ha discretizado el problema en términos de matrices, a partir de esta se muestra la relación con las formulas Green-Herrea para operadores diferenciales y se obtiene la formulación llamada "Formulas Green-Herrera para Matrices". Precisar que en la teoría estándar de las distribuciones no se hace enfasis para el caso cuando las funciones son completamente discontinuas. Y para este caso la formulación Green-Herrera es general.

Objetivos Particulares

Mostrar la importancia de las fórmulas Green-Herrera como una extensión de las derivadas distribucionales, esto se muestra con el operador Laplaciano y el operador de segundo orden más general. Con la Formulación Green-Herrera desarrollar el caso para el operador diferencial más general de segundo orden y comparar con el método FEM estándar y el método Galerkin Discontinuo. Así también mostrar ejemplos unidimensionales de operadores de extensión a derivadas distribucionales.

Capítulo 2

Formulaciones Débiles de Problemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales

El método de Residuos pesados es base para la fórmulación de los elementos finitos, por ello es de interés mostrar la formulación de este método.

2.1. El Método de Residuos Pesados para Ecuaciones Diferenciales Parciales

Considérese una ecuación diferencial escrita en forma de operador

$$\mathcal{L}u = f_{\Omega} \qquad \text{en } \Omega, \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{L}(\cdot)$ es el operador diferencial lineal y f_{Ω} es conocida como función de excitación o de fuerza, ambos definidos sobre un dominio Ω con frontera $\partial\Omega$. Nótese que la ecuación (2.1) es equivalente a escribir $\mathcal{L}u(x) = f(x)$, $\forall x \in \Omega$. En este trabajo se utilizará la notación de la ecuación (2.1). Sea $\widehat{u}$ una solución aproximada de la ecuación (2.1), entonces sustituyendo $\widehat{u}$ en la ecuación (2.1) típicamente esperamos un residuo $\mathcal{R}(\widehat{u})$ distinto de cero, dado de la siguiente forma

$$\mathcal{L}\widehat{u} - f_{\Omega} = \mathcal{R}\left(\widehat{u}\right) \tag{2.2}$$

Para el método de residuos pesados se utiliza una familia de funciones que se les llama de *peso* o *prueba* $\{w_1, w_2, ..., w_N\}$.

Definición 1 *En el Método de Residuos Pesados una función* $\widehat{u}$ *es solución aproximada de la ecuación diferencial (2.1) si y sólo si satisface*

$$\int_{\Omega} \{\mathcal{L}\widehat{u} - f_{\Omega}\} w_i dx = 0, \forall i = 1, 2, ..., N \tag{2.3}$$

En lo anterior se ha hablado de una solución aproximada $\widehat{u}$, entonces lo que sigue es proponer la función $\widehat{u}$ aproximada a la solución exacta. Para ello sea $\widehat{u}(x)$ una combinación lineal de las funciones $\phi_j(x)$, es decir,

$$\widehat{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x) \tag{2.4}$$

donde las constantes $\{u_j\}_{j=1}^N$ se han de asignar de alguna manera. Generalmente la solución aproximada $\widehat{u}$, es generalmente diferente de la solución exacta u. El método de residuos pesados proporciona una forma de selecionar a las constantes $\{u_j\}_{j=1}^N$ y por lo mismo para construir a la aproximación $\widehat{u}$, a la solución exacta.

En la ecuación (2.4) las funciones $\phi_j(x)$, $j = 1, 2, ..., N$ representa N funciones seleccionadas de un conjunto de funciones conocidas, linealmente independientes, a las que nos referimos como "funciones base". Nótese que un punto importante es tomar el mismo número de funciones base que de peso para así poder generar un sistema matricial cuadrado.

Considere la ecuación (2.3)

$$\int_{\Omega} \{\mathcal{L}\widehat{u} - f_{\Omega}\} w_i dx = 0, \forall i = 1, 2, ..., N \tag{2.5}$$

por el momento se supone que tanto el residuo y las funciones de *peso* pertenecen al espacio L_2 (ver Apendice A), entonces la ecuación anterior puede ser identificada como el producto interior de funciones en L_2. De la ecuación (2.5) se concluye que el residuo $\mathcal{R}(\widehat{u})$ es ortogonal a cada función de peso w_i.

2.2. Ejemplo del Método de Residuos Pesados

Para ilustrar el método de residuos pesados se considerará la ecuación de Poisson en el caso cuando el operador diferencial es Laplace:

$$\mathcal{L}u \equiv -\Delta u \text{ en } \Omega \tag{2.6}$$

una solución aproximada $\widehat{u}$, de la ecuación (2.6) debe satisfacer

$$\int_{\Omega} (-\Delta \widehat{u} - f_\Omega) w_i dx = 0, \ \forall i = 1, 2, ..., N$$

Considere un problema bien planteado ([3]), para la ecuación de Poisson en particular el problema con condicones Dirichlet veáse ([3]), con condiciones homogéneas, es decir,

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega \tag{2.7}$$

Para este ejemplo utilizaremos notación indicial, es decir

$$\mathcal{L}u \equiv -\Delta u = -\nabla \cdot (\nabla u) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \tag{2.8}$$

se sustituye la solución aproximada $\widehat{u}$ en la ecuación anterior y el problema se traduce en

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_k}\right) - f_\Omega = \mathcal{R}(\widehat{u}) \tag{2.9}$$

de la definición del método de residuos pesados se tiene que

$$\int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial x_k} \right) - f_{\Omega} \right\} w^i dx = 0 \tag{2.10}$$

La ecuación anterior es la expresión del método de residuos pesados para la ecuación de Poisson.

Capítulo 3

Adjuntos Formales de Operadores Diferenciales

Antes de definir el operador adjunto formal de un operador diferencial, primeramente debemos identificar el tipo de funciones con las que se va a trabajar, funciones escalares o funciones vectoriales, es decir, funciones con valores en $\mathbb{R}$ o con valores vectoriales en $\mathbb{R}^n$ respectivamente.
Para dar inicio al tema central de esta sección, entenderemos que se trabajará primeramente con funciones escalares, una vez dicho esto planteamos la siguiente definición.

Definición 2 *Sea $\mathcal{L}$ un operador diferencial, decimos que un operador $\mathcal{L}^*$ es su adjunto formal si satisface la siguiente condición*

$$w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w = \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}\,(u, w) \tag{3.1}$$

tal que las funciones u y w pertenecen a un espacio lineal. Aquí $\underline{\mathfrak{D}}(u, w)$ es una función bilineal. Cuando la ecuación anterior es integrada sobre un dominio Ω, esta función bilineal representa términos de frontera.

Definición 3 *Si $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$, el operador $\mathcal{L}$ es formalmente simétrico o auto-adjunto.*

3.1. Ejemplos de Operadores Adjuntos Formales

En este apartado se ilustrará con ejemplos la definición de operadores adjuntos formales y la parte correspondiente a términos de frontera. Empezaré por unos ejemplos muy sencillos de operadores diferenciales lineales.

A) **Operador de la derivada de orden cero**

La derivada de orden cero de una función u es tal que

$$\frac{d^0 u}{dx} = u \tag{3.2}$$

es decir, $\mathcal{L} = \frac{d^0}{dx}$. Entonces se tiene que

$$\mathcal{L}u = u \tag{3.3}$$

de la definición de operador adjunto tenemos que

$$w\mathcal{L}u = u\mathcal{L}^* w + \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}(u, w) \tag{3.4}$$

entonces en el término izquierdo tenemos

$$\begin{aligned} w\mathcal{L}u &= wu \\ &= uw \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nótese que en la ecuación anterior no aparece el término que involucre la divergencia por lo tanto se tiene que

$$u\mathcal{L}^* w = uw \tag{3.6}$$

y el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^* w = w \tag{3.7}$$

Nótese que el operador es *auto-adjunto*, y la función bilineal es nula.

B) **Operador de la derivada de primer orden**

La derivada de primer orden en términos del operador es

$$\mathcal{L}u = c(x)\frac{du}{dx} + b(x)u \tag{3.8}$$

entonces de la definición de operador adjunto tenemos

$$w\mathcal{L}u = u\mathcal{L}^*w + \nabla\cdot\underline{\mathfrak{D}}(u,w) \tag{3.9}$$

desarrollando el lado izquierdo tenemos

$$w\mathcal{L}u = wc(x)\frac{du}{dx} + wb(x)u \tag{3.10}$$

$$= \frac{d(wcu)}{dx} - u\frac{d(wc)}{dx} + wb(x)u$$

por lo tanto el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^*w = -\frac{d}{dx}(wc) + wb(x) \tag{3.11}$$

Y la función bilineal es

$$\underline{\mathfrak{D}}(u,w) = wcu \tag{3.12}$$

C) **Operador Elíptico**

El operador elíptico más sencillo de segundo orden es el Laplaciano

$$\mathcal{L}u \equiv -\triangle u = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{3.13}$$

un punto importante a notar en la ecuación anterior es que hemos puesto el operador Laplaciano con signo negativo, por el momento solo se hace énfasis que es un detalle muy importante para la obtención de la solución aproximada. Esto se verá con más detalle en capítulos posteriores.

De la definición del operador adjunto formal tenemos

$$w\mathcal{L}u = -w\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{3.14}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(w\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} \tag{3.15}$$

de aquí desarrollamos el segundo sumando y la expresión anterior es

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(w\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) - u\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) \tag{3.16}$$

si se agrupan términos la expresión anterior queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial w}{\partial x_i} - w\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - u\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) \tag{3.17}$$

entonces el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^* w = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) \tag{3.18}$$

es decir, el operador es *auto-adjunto*. Nótese que la función bilineal $\underline{\mathfrak{D}}(u, w)$ es

$$u\frac{\partial w}{\partial x_i} - w\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{3.19}$$

Entonces la ecuación (3.18) está dada por

$$\mathcal{L}^* w = -\triangle w \tag{3.20}$$

y la función bilineal es

$$\underline{\mathfrak{D}}\left(u, w\right) = u\nabla w - w\nabla u$$

D) **Operador diferencial elíptico de segundo orden más general**

Consideremos el operador diferencial elíptico de segundo orden más general

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right) + \nabla \cdot \left(\underline{b}u\right) + cu \tag{3.21}$$

Aquí $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{b}$ es una matriz y un vector respectivamente. De la definición de operador adjunto formal tenemos que

$$w\mathcal{L}u = u\mathcal{L}^{*}w + \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}\,(u,w) \tag{3.22}$$

desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior tenemos

$$w\mathcal{L}u = w\left(-\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu\right) \tag{3.23}$$

$$= -w\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right) + w\nabla \cdot (\underline{b}u) + wcu \tag{3.24}$$

aplicando la igualdad de divergencia a los dos primeros sumandos se tiene que la ecuación anterior es igual a

$$-\nabla \cdot \left(w\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right) + \underline{\underline{a}} \cdot \nabla u \cdot \nabla w + \nabla \cdot (w\underline{b}u) - \underline{b}u \cdot \nabla w + wcu \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} = \quad & -\nabla \cdot \left(w\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right) + \nabla \cdot \left(u\underline{\underline{a}}\nabla w\right) - u\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla w\right) + \\ & \nabla \cdot (w\underline{b}u) - \underline{b}u \cdot \nabla w + wcu \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$= \nabla \cdot \left[\underline{\underline{a}}\,(u\nabla w - w\nabla u)\right] + \nabla \cdot (w\underline{b}u) - u\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla w\right) - \underline{b}u \cdot \nabla w + wcu \tag{3.27}$$

reordenando la ecuación (3.27) e identificando los términos comunes se tiene

$$-u\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla w\right) - u\underline{b} \cdot \nabla w + ucw + \nabla \cdot \left[\underline{\underline{a}}\,(u\nabla w - w\nabla u) + (w\underline{b}u)\right] \tag{3.28}$$

por lo tanto el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^{*}w = -\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla w\right) - \underline{b} \cdot \nabla w + cw \tag{3.29}$$

y el término correspondiente a la función bilineal es

$$\underline{\mathfrak{D}}\,(u,w) = \underline{\underline{a}} \cdot (u\nabla w - w\nabla u) + (w\underline{b}u) \tag{3.30}$$

Por lo tanto hemos hallado el operador adjunto formal de el operador elíptico más general de segundo orden. Nótese que si el operador diferencial es solamente el Laplaciano, entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{*}$, es decir el operador es **auto-adjunto formal.**

E) **La ecuación bi-armónica**

$$\mathcal{L}u = \Delta^2 u \tag{3.31}$$

entonces se tiene que

$$w\mathcal{L}u = u\mathcal{L}^* w + \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}\,(u, w) \tag{3.32}$$

desarrollemos el término del lado izquierdo

$$\begin{aligned} w\mathcal{L}u &= w\Delta^2 u \qquad (3.33)\\ &= w\nabla \cdot (\nabla \Delta u) \end{aligned}$$

En lo que sigue se utilizará la siguiente identidad de divergencias $\nabla \cdot (sV) = s\nabla \cdot V + V \cdot \nabla s$ tal que s es función escalar y V vector, entonces sea $w = s$ y $\nabla \Delta u = V$, se tiene

$$\begin{aligned} &w\nabla \cdot (\nabla \Delta u) \qquad (3.34)\\ =\ &\nabla \cdot (w\nabla \Delta u) - \nabla \Delta u \cdot \nabla w \end{aligned}$$

ahora sea $s = \Delta u$ y $V = \nabla w$, entonces la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (w\nabla \Delta u) - \nabla \Delta u \cdot \nabla w \qquad (3.35)\\ =\ &\nabla \cdot (w\nabla \Delta u) + \Delta u \nabla \cdot \nabla w - \nabla \cdot (\Delta u \nabla w)\\ =\ &\Delta w \nabla \cdot \nabla u + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u - \Delta u \nabla w) \end{aligned}$$

sea $s = \Delta w$ y $V = \nabla u$,entonces tenemos que

$$\begin{aligned} &\Delta w \nabla \cdot \nabla u + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u - \Delta u \nabla w) \qquad (3.36)\\ =\ &\nabla \cdot (\Delta w \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla (\Delta w) + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u - \Delta u \nabla w)\\ =\ &-\nabla u \cdot \nabla (\Delta w) + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u + \Delta w \nabla u - \Delta u \nabla w) \end{aligned}$$

por último sea $s = u$ y $V = \nabla (\Delta w)$ y obtenemos que

$$\begin{aligned} &-\nabla u \cdot \nabla (\Delta w) + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u + \Delta w \nabla u - \Delta u \nabla w) \qquad (3.37)\\ =\ &u\nabla \cdot (\nabla (\Delta w)) - \nabla \cdot (u\nabla (\Delta w)) + \nabla \cdot (w\nabla \Delta u + \Delta w \nabla u - \Delta u \nabla w) \end{aligned}$$

reordenando términos la ecuación anterior se puede escribir como

$$u\Delta^2 w + \nabla \cdot (w\nabla\Delta u + \Delta w\nabla u - \Delta u\nabla w - u\nabla\Delta w)$$

Por lo tanto

$$w\mathcal{L}u = u\Delta^2 w + \nabla \cdot (w\nabla\Delta u + \Delta w\nabla u - \Delta u\nabla w - u\nabla\Delta w) \tag{3.38}$$

entonces se tiene que el operador adjunto formal es

$$\mathcal{L}^* w = \Delta^2 w \tag{3.39}$$

y los términos de la función bilineal son

$$\underline{\mathfrak{D}}\,(u, w) = w\nabla\Delta u + \Delta w\nabla u - \Delta u\nabla w - u\nabla\Delta w \tag{3.40}$$

Por lo tanto hemos hallado el operador adjunto formal de operador bi-armónico. Nótese que el operador bi-armónico es **auto-adjunto formal.**

3.2. Adjuntos Formales para Sistemas de Ecuaciones

En esta sección trabajaremos con funciones vectoriales; para ello necesitamos plantear la definición de operadores adjuntos formales para este tipo de funciones.

Definición 4 *Sea $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$ un Operador Diferencial, decimos que un operador $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^*$ es su adjunto formal si satisface la siguiente condición*

$$\underline{w}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u} - \underline{u}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}^*\underline{w} = \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}\left(\underline{u}, \underline{w}\right) \tag{3.41}$$

tal que las funciones $\underline{u}$ y $\underline{w}$ pertenecen a un espacio lineal. Aquí $\underline{\mathfrak{D}}(\underline{u}, \underline{w})$ representa términos de frontera.

Nótese que $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$, es una matriz y que tanto $\underline{u}$ y $\underline{w}$ son funciones vectoriales. Por lo tanto se puede trabajar con funciones vectoriales utilizando operadores matriciales.

A continuación se desarrollan tres ejemplo de operadores matriciales

A) **Operador diferencial con elasticidad estática con valores vectoriales**

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u} = -\nabla \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \nabla \underline{u} \tag{3.42}$$

de la definición de operador adjunto formal tenemos que

$$\underline{w}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u} = \underline{u}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}^*\underline{w} + \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}\left(\underline{u}, \underline{w}\right) \tag{3.43}$$

para hacer el desarrollo del término del lado izquierdo se utilizará notación indicial, es decir, $\underline{w}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u}$ tiene los siguientes componentes

$$-w_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijpq}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\right)\right);\ i = 1, 2, 3$$

utilizando la igualdad de divergencia tenemos

$$\begin{aligned} & -w_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) \right) \\ = \;& C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(w_i C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) \\ = \;& \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i C_{ijpq} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijpq} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(w_i C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

reordenado términos tenemos que la ecuación anterior es

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i C_{ijpq} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_i C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijpq} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \tag{3.45}$$

en notación vectorial se tiene que

$$\underline{w} \; \underline{\underline{\mathcal{L}}} \; \underline{u} = -\underline{u} \nabla \cdot \left(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \nabla \underline{w} \right) + \nabla \cdot \left(\underline{u} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \nabla \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \nabla \underline{u} \right) \tag{3.46}$$

por lo tanto el operador adjunto formal es

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^* \underline{w} = -\nabla \cdot \left(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \nabla \underline{w} \right) \tag{3.47}$$

y el término de la función bilineal es

$$\underline{\mathfrak{D}} \left(\underline{u}, \underline{w} \right) = \underline{u} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \nabla \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \nabla \underline{u} \tag{3.48}$$

El operador de elasticidad es **auto-adjunto formal.**

B) **Métodos Mixtos Para la Ecuación de Laplace**

Este método generaliza en un sentido a FEM. Desde hace tiempo han sido aplicados en muchas áreas, particularmente a mecánica de solidos y fluidos. La razón principal para usar métodos mixtos es que en algunas aplicaciones un vector variable (velocidad del fluido) es la variable primaria en la cual se está interesado. Entonces los métodos mixtos son desarrollados para obtener la aproximación de dos variables; la variable vectorial y la variable escalar (ej. presión) simultaneamente.

Ejemplo: Operador Laplaciano

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u} = \Delta \underline{u} = \underline{f} \tag{3.50}$$

Sea $\underline{p}$, un vector y definimos

$$\nabla \cdot \underline{p} = f$$

entonces la ecuación (3.50) se puede obtener del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \underline{p} - \nabla u &= \underline{0} \\ \nabla \cdot \underline{p} &= f \end{aligned}$$

escrita la ecuación anterior en forma matricial se obtiene

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u} = \begin{bmatrix} 1 & \text{-}\nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ f \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

nótese que se consideró campos vectoriales de 4 dimensiones, estos son denotados por :

$$\underline{u} \equiv \{\underline{p}, u\} \text{ y } \underline{w} = \{\underline{q}, w\} \tag{3.52}$$

Ahora el operador diferencial con valores vectoriales es el siguiente

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u} &= \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{p} - \nabla u \\ \nabla \cdot \underline{p} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.53}$$

entonces

$$\underline{w}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

utilizamos la definición de operador adjunto

$$\underline{w}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{u} = \underline{u}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{*} \underline{w} + \nabla \cdot \underline{\underline{\mathfrak{D}}} \left(\underline{u}, \underline{w}\right) \tag{3.55}$$

haciendo el desarrollo del término del lado izquierdo de la ec. anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \underline{w}\,\underline{\underline{\mathcal{L}}}\,\underline{u} &= \begin{bmatrix} \underline{q} \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{q} \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{p} - \nabla u \\ \nabla \cdot \underline{p} \end{bmatrix} \\ &= \underline{q}\,\underline{p} - \underline{q}\nabla u + w\nabla\cdot\underline{p} \end{aligned} \tag{3.56}$$

aquí se utiliza la igualdad de divergencia en los dos términos del lado derecho y obtenemos

$$\begin{aligned} & \underline{q}\,\underline{p} - \underline{q}\nabla u + w\nabla\cdot\underline{p} \\ = \; & \underline{q}\,\underline{p} + u\nabla\cdot\underline{q} - \nabla\cdot\left(\underline{q}u\right) - \underline{p}\cdot\nabla w + \nabla\cdot\left(w\underline{p}\right) \\ = \; & \underline{p}\left(\underline{q} - \nabla w\right) + u\nabla\cdot\underline{q} + \nabla\cdot\left(w\underline{p} - u\underline{q}\right) \end{aligned} \tag{3.57}$$

si se agrupan los dos primeros sumandos como un producto de vector matriz vector se tiene que

$$\begin{aligned} & \underline{p}\left(\underline{q} - \nabla w\right) + u\nabla\cdot\underline{q} + \nabla\cdot\left(w\underline{p} - u\underline{q}\right) \\ = \; & \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q} - \nabla w \\ \nabla\cdot\underline{q} \end{bmatrix} + \nabla\cdot\left(w\underline{p} - u\underline{q}\right) \\ = \; & \begin{bmatrix} \underline{p} \\ u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q} \\ w \end{bmatrix} + \nabla\cdot\left(w\underline{p} - u\underline{q}\right) \end{aligned} \tag{3.58}$$

por lo tanto el operador adjunto formal es

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{*}\underline{w} &= \begin{bmatrix} 1 & -\nabla \\ \nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{q} \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{q} - \nabla w \\ \nabla\cdot\underline{q} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.59}$$

y el término correspondiente a la funcional bilineal es

$$\underline{\mathfrak{D}}\left(\underline{u}, \underline{w}\right) = w\underline{p} - u\underline{q} \tag{3.60}$$

C) **Problema de Stokes**

El problema de Stokes es derivado de la ecuación de Navier-Stokes, la cual es utilizada en dinámica de fluidos viscosos. En este caso estamos suponiendo que el fluido es estacionario, la fuerza gravitacional es nula y el fluido incompresible. Entonces el sistema de ecuaciones a ser considerado es

$$\begin{aligned} -\Delta \underline{u} + \nabla p &= f \\ -\nabla \cdot \underline{u} &= 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Tal que $\underline{u}$ es la velocidad del fluido, p la presión y f son las fierzas de volumen.
Se considerará un campo vectorial de 4 dimensiones. Ellos serán denotados por

$$\underline{U} = \{\underline{u}, p\} \text{ y } \underline{W} = \{\underline{w}, q\} \tag{3.62}$$

Ahora el operador diferencial con valores vectoriales es el siguiente

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{U} = \begin{bmatrix} -\Delta & \nabla \\ -\nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

el desarrollo se hará en notación indicial, entonces tenemos que

$$\underline{W}\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}\ \underline{U} = \left\{ \begin{array}{c} -\underline{w}\Delta\underline{u} + \underline{w}\nabla p \\ -q\nabla \cdot \underline{u} \end{array} \right. \tag{3.64}$$

Usando notación indicial, se tiene que para la ecuación anterior

$$w_i \left(-\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -\sum_j w_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + w_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ &= -p\frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(w_i p) \end{aligned}$$

Desarrollando la primera suma como la derivada del producto de las dos funciones w_i y u_i se tiene

$$-\sum_j u_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right) - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.66}$$

$$- \quad p\frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(w_i p)$$

Reordenando términos tenemos

$$-\sum_j u_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} - p\frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \tag{3.67}$$

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(w_i p)$$

Por otro lado, considerando el segundo término de la ecuación (3.64), se tiene que

$$-q\nabla \cdot \underline{u} \tag{3.68}$$

en notación índicial está dado por

$$-q\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\sum_i q\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{3.69}$$

$$= \sum_i u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(q u_i)$$

en la ecuación anterior se utilizó la derivada de un producto, entonces agrupando las ecuaciones (3.65) y (3.69) se tiene

$$w_i\left(-\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial p}{\partial x_i}\right) - q\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{3.70}$$

$$= \quad -\sum_j u_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} - p\frac{\partial w_i}{\partial x_i} +$$

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(w_i p) +$$

$$\sum_i u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(q u_i)$$

ordenando los términos se tiene que

$$-\sum_j u_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} + \sum_i u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \tag{3.71}$$

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i p) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (q u_i)$$

escribiendo la ecuación anterior en notación vectorial tenemos

$$\begin{aligned} & -\underline{u}\Delta\underline{w} + \underline{u}\nabla q - p\nabla \cdot \underline{w} + \nabla \cdot (\underline{u}\nabla\underline{w} - \underline{w}\nabla\underline{u} + \underline{w}p - \underline{u}q) \qquad (3.72) \\ = \; & \underline{u}(-\Delta\underline{w} + \nabla q) - p\nabla \cdot \underline{w} + \nabla \cdot (\underline{u}\nabla\underline{w} - \underline{w}\nabla\underline{u} + \underline{w}p - \underline{u}q) \end{aligned}$$

Por lo tanto el operador adjunto formal es

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}^* \underline{W} = \begin{bmatrix} -\Delta & \nabla \\ -\nabla\cdot & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{w} \\ q \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

y los términos de la función bilineal son

$$\underline{\mathfrak{D}}(\underline{u}, \underline{w}) = \underline{u}\nabla\underline{w} - \underline{w}\nabla\underline{u} + \underline{w}p - \underline{u}q \tag{3.74}$$

Por lo tanto se han mostrado ejemplos de operadores adjuntos formales de sistemas de ecuaciones para modelos de sistemas continuos.

Capítulo 4

Derivadas Distribucionales y Espacios de Sobolev

Antes de definir las derivadas distribucionales, se introducen definiciones que son fundamentales para el desarrollo en esta sección.

Definición 5 *El soporte de una función u definida sobre un dominio Ω es la cerradura $\overline{K}$ del conjunto de puntos $K \subset \Omega$ sobre los cuales $u(x) \neq 0$; usamos la notación $\overline{K}$ =supp $u(x)$. Decimos que u tiene soporte compacto sobre Ω si su soporte $\overline{K}$ es compacto.*

Definición 6 *El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ será el subconjunto de funciones infinitamente diferenciales con soporte compacto; algunas veces se denota también como $C_0^\infty(\Omega)$.*

4.1. Distribuciones

Definición 7 *Definimos una pseudo-topología en $\mathcal{D}(\Omega)$ y decimos que una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge si existe una función $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que el soporte de las $\{u_n\}$ están todas contenidas en un subconjunto compacto de Ω y sus derivadas $\{D^\alpha u_n\}$ de cualquier orden converge uniformemente a $D^\alpha u$.*

Definición 8 *Distribuciones: Es el espacio de funcionales lineales definidas sobre el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ que son continuas con respecto a la pseudo-topología de la definición 7.*

Esta definición puede ser escrita como

F es continua sobre el espacio $D(\Omega)$ es llamada una distribución o función generalizada, si y sólo si para cada conjunto compacto $K\subset\ \Omega$ existe una constante $C_K>0$ y un entero no negativo m tal que

$$|F\,(\phi)| \leq C_K \sup_{\substack{k\leq m \\ x\in K}} \left| \frac{d^k\phi\,(x)}{dx^k} \right| \qquad \forall\phi\in\mathcal{D}(K)$$

con $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.
Se dice que el espacio de distribuciones es el espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, denotado como $\mathcal{D}'(\Omega)$
Nótese que se puede asociar una distribución con cada una $u\in L_2\,(\Omega)$, todavía denotado por u y definido por

$$u\,(\phi) = \langle u,\phi\rangle = \int_\Omega u\phi dx \qquad \phi\in\mathcal{D}(\Omega) \tag{4.1}$$

Las funciones $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$ a veces se les suele llamar funciones de prueba. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la dualidad de parida entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$.
Para definir las derivadas distribucionales primero se introduce la notación multiíndice para derivadas de orden superior
Notación multi-índice: Sea $\mathbb{Z}_+^n$ el conjunto de todas las n-duplas de enteros no negativos, un miembro de $\mathbb{Z}_+^n$ es usualmente denotato por α ó β, por ejemplo $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $\alpha_i\in\mathbb{Z}_+^n$. Denotaremos por $|\alpha|$ la suma $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ y por $D^\alpha u$ la derivada parcial

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}} \tag{4.2}$$

así, si $|\alpha| = m$, entonces $D^\alpha u$ denota la m-ésima derivada parcial de u. Si $\alpha = (0,0,...,0)$, entonces se tiene que $D^\alpha u = u$, es la derivada de orden cero.

Ejemplo:
Si $n = 3$, entonces un multiíndice $\alpha \in Z_+^3$ es una tripleta ordenada de enteros no negativos. Por ejemplo,$\alpha = (1, 0, 3)$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 0 + 3 = 4$. Además en este caso la derivada parcial $D^\alpha u$ es la cuarta derivada definida por

$$D^\alpha u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^1 \partial y^0 \partial z^3} = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial z^3} \tag{4.3}$$

4.2. Derivadas Distribucionales

Supongamos que $f(x)$ tiene la propiedad que su derivada $f'(x) = df(x)/dx$ es localmente integrable. Entonces $f'(x)$ genera la distribución $\langle f', \phi \rangle$. Integrando por partes y recordando que la funciones de prueba ϕ tienen soporte compacto (lo cual implica que $\phi(-\infty) = \phi(\infty) = 0$), entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\langle f', \phi \rangle &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.4)\\
\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\phi(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi'(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(f(x)\,\phi(x)\right)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi'(x)\,dx + f(x)\,\phi(x)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= -\langle f, \phi' \rangle
\end{aligned}$$

Es decir, *"la acción de f' sobre ϕ es igual que la acción de menos f sobre ϕ'"*. Ahora usamos este resultado como una base para definir la derivada q' de cualquier distribución q. Sea q una distribución cualquiera. La funcional p definida por

$$\langle p, \phi \rangle = -\langle q, \phi' \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{4.5}$$

es llamada la **derivada distribucional** de q, y usamos la notación

$$p = q'$$

Esto es, la ecuación (4.5) es hecha para aparecer como una integración por partes:

$$\langle q', \phi \rangle = -\langle q, \phi' \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{4.6}$$

Se puede demostrar que la cantidad q' es también una distribución.

Funciones como la delta de Dirac y la Heaviside no tienen derivada en el sentido ordinario, sin embargo, si estas funciones son tratadas como distribuciones es posible extender el concepto de derivada de tal manera que cualquier número de derivadas pueda ser definida para estas funciones y verdaderamente, para cualquier distribución.
Derivadas distribucionales de orden superior son definidas de la siguiente manera.
Dada la notación multi-índice α y una distribución u, podemos definir su derivada distribucional $D^{\alpha}u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$\langle D^{\alpha}u, \phi \rangle = -1^{|\alpha|} \langle u, D^{\alpha}\phi \rangle \qquad \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{4.7}$$

Entonces de la definición de derivada distribucional se tiene que

$$\langle D^{\alpha}u, \phi \rangle = -1^{|\alpha|} \langle u, D^{\alpha}\phi \rangle = -1^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha}\phi dx \quad \textit{con } u \in L_2(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} (D^{\alpha}u)\, \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha}\phi dx \tag{4.8}$$

Definición 9 *La derivada de cualquier distribución u se define como: La $\alpha-$ésima derivada parcial distribucional o generalizada de una distribución u, es definida por una distribución denotada por $D^{\alpha}u$, que satisface*

$$\langle D^{\alpha}u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^{\alpha}\phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{4.9}$$

Nótese que si u pertenece a $C^m\left(\bar{\Omega}\right)$, entonces la derivada distribucional coincide con la derivada parcial $\alpha-$ésima para $|\alpha| \leq m$.

Ahora se está en condiciones de introducir los espacios de Sobolev.

4.3. Espacios de Sobolev

En esta subsección se definen los espacios de Sobolev. Primeramente definiremos lo que entendemos por un espacio L^2.

Definición 10 *Una función $u(\underline{x})$ definida sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice que pertenece al espacio $L_2(\Omega)$ si*

$$\int_{\Omega} |u(\underline{x})|^2 \, d\underline{x} < \infty \tag{4.10}$$

es decir, es integrable en el sentido de Lebesgue.

Definición 11 *El espacio de Sobolev de orden m, para $m \geq 0$ denotado por $H^m(\Omega)$, es definido*

$$H^m(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L_2(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\} \tag{4.11}$$

Si se considera que a cada distribución se le puede asociar una función u que pertenece a $L_2(\Omega)$ entonces se tiene que la definición de espacio de Sobolev es equivalente a

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u_\alpha \phi dx \qquad \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{ y } u_\alpha \in L_2(\Omega) \tag{4.12}$$

y se puede identificar a $D^\alpha u$ con u_α
De manera más general se puede definir el espacio de Sobolev de orden m, p sobre Ω esto es

Definición 12 *El espacio de Sobolev de orden m,p para $m \geq 0$ denotado por $H^{m,p}(\Omega)$, es definido*

$$H^{m,p}(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L_p(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\} \tag{4.13}$$

Los espacios L_p, están definidos en el apéndice.
Considérese únicamente funciones con valores en los reales y definimos en el espacio H^m un producto interior denotado por $(\cdot, \cdot)$
El espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar siguiente

Definición 13 *El producto escalar* $(\cdot,\cdot)$ *de dos elementos* u *y* $\mathtt{v} \in H^m(\Omega)$ *está dado por*

$$(u,\mathtt{v})_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha \mathtt{v})_{L_2(\Omega)} \tag{4.14}$$

Nótese que si $m = 0$ entonces se tiene que $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, es decir

$$\begin{aligned} (u,\mathtt{v})_{H^0(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq 0} (D^\alpha u, D^\alpha \mathtt{v})_{L_2(\Omega)} \\ &= (u,\mathtt{v})_{L_2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega u\mathtt{v}d\underline{x} \end{aligned} \tag{4.15}$$

que es el producto escalar para dos funciones $u, \mathtt{v}$ definidas en $L_2(\Omega)$. Por lo tanto $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.
La norma inducida por el producto escalar es la siguiente

Definición 14 *La norma* $\|\cdot\|_{H^m}$ *inducida a partir del producto escalar* $(\cdot,\cdot)_{H^m}$ *queda definida por*

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = (u,u)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^2 \, dx \tag{4.16}$$

Nota: El espacio $L_2(\Omega)$ será denotado por $H^0(\Omega)$.

En forma general se puede definir la norma para cada $u \in H^m_p(\Omega)$ como sigue

Definición 15 $u \in H^m_p(\Omega)$ *entonces la norma de* u *está dada por*

$$\|u\|^p_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^p \, dx \tag{4.17}$$

Es de importancia considerar el espacio $H^1(\Omega)$. Entonces si u y $\mathrm{v} \in H^1(\Omega)$, tal que son funciones definidas en x_1, x_2. Entonces el producto interior para

$H^1(\Omega)$ está definido como

$$\begin{aligned}(u,\mathtt{v})_{H^1(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq 1}(D^\alpha u, D^\alpha \mathtt{v})_{L_2(\Omega)} \\ &= \left(D^0 u, D^0 \mathtt{v}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(D^1 u, D^1 \mathtt{v}\right)_{L_2(\Omega)} \\ &= (u,\mathtt{v})_{L_2(\Omega)} + \left(D^1 u, D^1 \mathtt{v}\right)_{L_2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega u\mathtt{v} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \mathtt{v}}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \mathtt{v}}{\partial x_2}\right)dx \\ &= \int_\Omega u\mathtt{v} + \nabla u \cdot \nabla \mathtt{v}dx\end{aligned} \tag{4.18}$$

Nótese que se ha considerado que $\alpha = (1,0)\,;(0,1)$ y la definición de derivada parcial en notación indicial.
Un espacio completo con producto interior es llamado un espacio de Hilbert, un espacio normado y completo es llamado espacio de Banach. Y como todo producto interior define una norma, entonces todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach.

Definición de los espacios $H_0^m(\Omega)$. Cuando se trabaja con problemas con valores en la frontera, es necesario plantear espacios de funciones que se anulen en la frontera, para ello se hace uso de los espacios $H_0^m(\Omega)$

Definición 16 *$H_0^m(\Omega)$ se define como la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$, es decir, es la cerradura de las funciones continuamente diferenciables con soporte compacto que pertenecen a $H^m(\Omega)$. Es decir*

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \tag{4.19}$$

donde la cerradura está en $H^m(\Omega)$

$H_0^m(\Omega)$ es un subconjunto propio de $H^m(\Omega)$ si y sólo si $m > 1/2$:

$$\begin{cases} H_0^m(\Omega) = H^m(\Omega)\,, m \leq 1/2 \\ H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)\,, m > 1/2 \end{cases} \tag{4.20}$$

Sea m un número real no negativo. Se define H^{-m}como

Definición 17 *El espacio $H^{-m}(\Omega)$ se define como el espacio dual de $H_0^m(\Omega)$, es decir, como el espacio de funcionales lineales continuas sobre $H_0^m(\Omega)$. Dada una funcional $u\in H^{-m}(\Omega)$ una función $v\in H_0^m(\Omega)$, se denota el valor de u en v por $\langle u, \mathtt{v}\rangle$. El espacio H^{-m} es entonces equipado con la norma dual*

$$||u||_{H^{-m}(\Omega)} = \sup_{v\in H_0^m(\Omega)} \frac{\langle u, \mathtt{v}\rangle}{||\mathtt{v}||_{H^m(\Omega)}} \tag{4.21}$$

Definición 18 *Si $u\in H^{-m}(\Omega)$ entonces*

$$\int_\Omega uwdx$$

está definida solamente si $w \in H^m(\Omega)$ de otra forma no.

4.4. Espacios traza

Para poder plantear los *espacios traza* que son parte fundamental en el desarrollo de este tabajo, primeramente se introducen las definiciones de un *dominio Lipschitz*, así como *frontera Lipschitz*.
Aquí y en lo que sigue, se asume que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio Lipschitz. Es decir, es un conjunto abierto acotado con frontera Lipschitz continua.

Definición 19 *La frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz continua si existe un número finito de conjuntos abiertos $\mathcal{O}_i$, i=1,2,...,m, que cubre $\partial\Omega$, tal que, para cada i, la intersección $\partial\Omega \cap \mathcal{O}_i$ es la gráfica de una función Lipschitz continua y $\Omega \cap \mathcal{O}_i$ depende sobre un lado de esta gráfica.*

Traza de una función en $H^m(\Omega)$. Una parte importante en los problemas con valores en la frontera definidos sobre el dominio Ω es definir de forma única los valores que tomará la función sobre la frontera $\partial\Omega$. Este apartado se identificará bajo que condiciones es posible tener definidos de forma única los valores en la frontera $\partial\Omega$ tal que podamos definir un operador $tr(\cdot)$ continuo que actué en $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, tal que $tr(u) = u\,|_{\partial\Omega}$.

Lema 20 *Sea* Ω *una región Lipschitz y sea* $m>1/2$*. Entonces, el operador* $tr{:}C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right) \rightarrow C^{\infty}\left(\partial\Omega\right)$*, mapea una función dentro de sus restricciones sobre la frontera, puede ser extendido continuamente a un operador tr:* $H^{m}\left(\Omega\right) \rightarrow H^{m-1/2}\left(\partial\Omega\right)$.

Lema 21 *Con las mismas suposiciones como en el lema (17), existe un operador continuo* $\mathcal{R}_0 : H^{m-1/2}\left(\partial\Omega\right) \rightarrow H^{m}\left(\Omega\right)$*, tal que* $tr(\mathcal{R}_0 u) = u$*,* $u \in H^{m-1/2}\left(\partial\Omega\right)$.

Las definiciones y propiedades previas pueden facilmente ser generalizadas para un subconjunto propio $\Gamma \subset \partial\Omega$

El espacio $H_0^m\left(\Omega\right)$ coincide con el kernel de $tr(\cdot)$ para $1/2 < m < 3/2$.

Capítulo 5

Funciones Definidas por Tramos y sus Espacios de Sobolev

Para definir las funciones definidas por tramos, primeramente se introduce un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2 \text{ ó } 3)$, con frontera $\partial\Omega$. Sea $\Pi = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_E\}$ una partición del dominio Ω,donde Ω_i $i = 1, 2, ..., E$, son los subdominios veáse la figura (5.1).

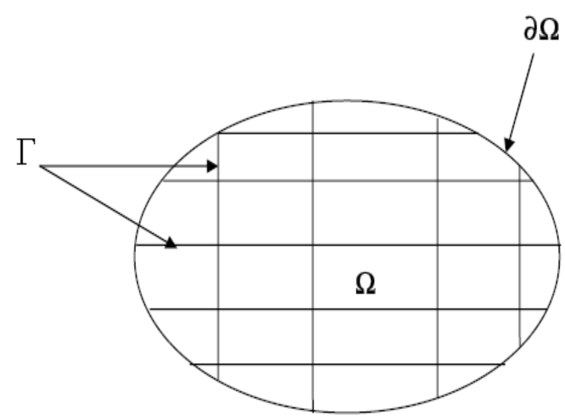

Figura 5.1: El dominio Ω y su partición

Dada tal partición, las fronteras de los subdominios son $\partial\Omega_i$ $i = 1, 2, ...E$. Claramente $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{E} \partial\Omega_i$, en adición $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{E} \partial\Omega_i$, es definido como el complemento cerrado de $\partial\Omega$ con respecto a $\bigcup_{i=1}^{E} \partial\Omega_i$, y será llamado *frontera interna,* mientras que $\partial\Omega$ será llamado frontera exterior. Nótese que la frontera interna también es caracterizada por

$$\Gamma = \bigcup_{i \neq j} \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \tag{5.1}$$

Además se asume que Γ ha sido *orientada*, es decir, lados positivo y negativo han sido definidos en cada punto $\underline{x} \in \Gamma$, excepto en la esquinas. Entonces, un vector único normal $\underline{n}$ se toma apuntando hacía afuera del lado positivo, casi donde quiera sobre Γ excepto en un conjunto de medida cero.

Una vez planteadas las bases necesarias para un dominio de trabajo Ω, se necesita introducir las funciones definidas para cada subdominio Ω_i.

5.1. Definición de Funciones Definidas por Tra mos

Dada la partición $\Pi = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_E\}$, del dominio Ω una función definida por tramos significa una sucesión de funciones $(w_1, w_2, ..., w_E)$, tal que para cada $i = 1, 2, ...E$, la función w_i está definida casi donde quiera en Ω_i ; las funciones w_i son llamadas "localmente definidas". Cuando una función w es definida casi en todas partes de Ω, podemos asociarle a esta, unicamente, una función definida por tramos $(w_1, w_2, ..., w_E)$. Para este fin la función w_i, para cada $i = 1, 2, ..., E$, es tomada para ser la restricción de w en Ω_i. La sucesión $(w_1, w_2, ..., w_E)$ será referida como la representación por tramos de w. Inversamente, dada cualquier función definida por tramos $(w_1, w_2, ..., w_E)$, existe una única función w, definida en Ω, tal que $(w_1, w_2, ..., w_E)$ es la representación por tramos de w; tal función definida en Ω tiene la siguiente restricción

$$w \equiv w_i; \qquad \text{(a.e.) en } \Omega_i \quad i = 1, 2, ..., E \tag{5.2}$$

Cuando se consideran funciones definidas por tramos, si la traza de w_i, es definida casi donde quiera sobre $\partial\Omega_i$, para cada $i = 1, 2, ...E$, entonces dos funciones (w_+, w_-) son definidas casi donde quiera sobre los lados positivo y negativo de Σ respectivamente. Esto permite definir el salto y el promedio de w a través de Σ por

$$[[w]] = w_+ - w_- \quad \text{y} \quad \dot{w} \equiv \frac{1}{2}(w_+ + w_-) \tag{5.3}$$

respectivamente. De aquí se obtienen las siguientes identidades

$$w_+ = \dot{w} + \frac{1}{2}[[w]] \quad \text{y} \quad w_- = \dot{w} - \frac{1}{2}[[w]] \tag{5.4}$$

Debe considerarse que en muchas aplicaciones w_i serán funciones con valores vectoriales; es decir, estas funciones pueden tomar valores en $\mathbb{R}^n$. Nótese que los valores de w_+ y w_- se obtienen si se plantean las definiciones de (5.3) como un sistema de ecuaciones lineales de 2 por 2 y se resuelve para w_+ y w_-.Esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w_+ + \frac{1}{2}w_- &= \dot{w} \\ w_+ - w_- &= [[w]] \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2. Espacios de Sobolev de Funciones Definidas por Tramos

Dada una familia de espacios lineales $\{D(\Omega_1), D(\Omega_2), ..., D(\Omega_E)\}$, tal que $D(\Omega_i)$, para cada $i = 1, 2, ...E$, es un espacio lineal de funciones definido casi donde quiera en Ω_i, se puede considerar el espacio

$$D(\Omega) = D(\Omega_1) \oplus D(\Omega_2) \oplus ... \oplus D(\Omega_E) \tag{5.6}$$

Tal que $\oplus$ denota la suma directa entre los espacios $D(\Omega_i)$

Entonces, los elementos de $D(\Omega)$ son funciones definidas por tramos, $(w_1, w_2, ..., w_E)$, con $w_i \in D(\Omega_i)$, $i = 1, 2, ..., E$. Un ejemplo de tales espacios lineales es el espacio de Sobolev de orden p para funciones definidas por tramos, el cual es definido por

$$\hat{H}^p(\Omega) = H^p(\Omega_1) \oplus H^p(\Omega_2) \oplus ... \oplus H^p(\Omega_E), \quad p = 0, 1, .. \tag{5.7}$$

Aquí, $H^p(\Omega_i)$ es el espacio de Sobolev de orden p, de funciones definidas en Ω_i . Unicamente valores enteros de $p \geq 0$, serán considerados. Cada función $w \in \hat{H}^p(\Omega)$ es una sucesión, $w \equiv (w_1, w_2, ..., w_E)$,con $w_i \in H^p(\Omega_i)$, $i = 1, 2, ..., E$.

Observe que cuando $w \in H^p(\Omega)$, entonces las restricción, w_i de w a Ω_i tiene la propiedad que $w_i \in H^p(\Omega_i)$. Por lo tanto

$$H^p(\Omega) \subset \hat{H}^p(\Omega) \tag{5.8}$$

Para $p > 0$, esta es una inclusión propia. Sin embargo para $p = 0$, $H^0(\Omega) \equiv \hat{H}^0(\Omega) \equiv L^2(\Omega)$. Además

$$H^0(\Omega) \equiv \hat{H}^0(\Omega) \supset \hat{H}^p(\Omega) \qquad \forall p \geq 0 \tag{5.9}$$

Aquí las funciones definidas en Ω han sido identificadas con sus representaciones por partes como se explico en la sección anterior. En vista de la ecuación (5.9), todos los espacios $\hat{H}^p(\Omega)$, para $p = 0, 1, 2, ...$, están hechos de funciones las cuales pertenecen a $H^0(\Omega) \equiv L^2(\Omega)$.

Además, para cada $p \geq 0$, una función $\hat{\mathtt{v}} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_E) \in H^0(\Omega)$ pertenecen a $\hat{H}^p(\Omega)$ si y sólo si la norma

$$||\hat{\mathtt{v}}||_{p,\Omega,\Pi} = \left(\sum_{i=1}^{E} ||\mathtt{v}_i||^2_{p,\Omega_i} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.10}$$

está bien definida. Nótese

$$||\mathtt{v}_i||^2_{p,\Omega_i}$$

es la norma para la función $\mathtt{v}_i \in H^p(\Omega_i)$ definida anteriormente.

Aquí, los subíndices Ω y Π han sido incluidos para enfatizar el hecho de que tal norma no solo depende del dominio Ω, si no tambien de la partición Π. Cuando $\hat{H}^{\ p}(\Omega)$ es equipado con la norma de la ecuación (5.10), este es un espacio de Hilbert. La familia de subespacios $\left\{\hat{H}^p(\Omega)\,|p=0,1,2,...\right\}$ es una familia anidada de espacios de Hilbert en el sentido que

$$H^0(\Omega)\supset\hat{H}^p(\Omega)\supset\hat{H}^q(\Omega) \tag{5.11}$$

cuando $0\leq p\leq q$.

Recordemos que cuando $u_\alpha, w_\alpha\in H^1(\Omega)$ la siguiente fórmula de Green se cumple (ver Ciarlet [15]):

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} u_\alpha\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_i}dx=-\int\limits_{\Omega_\alpha} w_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}dx+\int\limits_{\partial\Omega_\alpha} u_\alpha w_\alpha n_i dx \tag{5.12}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\alpha=1}^{E}\int\limits_{\Omega_\alpha} u_\alpha\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_i}dx=-\sum_{\alpha=1}^{E}\int\limits_{\Omega_\alpha} w_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}dx+\sum_{\alpha=1}^{E}\int\limits_{\partial\Omega_\alpha} u_\alpha w_\alpha n_i dx$$

o, equivalentemente

$$\sum_{\alpha=1}^{E}\int\limits_{\Omega_\alpha} u_\alpha\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_i}dx=-\sum_{\alpha=1}^{E}\int\limits_{\Omega_\alpha} w_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}dx+\int\limits_{\partial\Omega} uwn_i dx-\int\limits_{\Gamma}[[uw]]\,n_i dx \tag{5.13}$$

aquí, la identidad

$$\sum_{\alpha=1}^{E}\int\limits_{\partial\Omega_\alpha} u_\alpha w_\alpha n_i dx=\int\limits_{\partial\Omega} uwn_i dx-\int\limits_{\Gamma}[[uw]]\,n_i dx \tag{5.14}$$

ha sido usada. Por eso la ecuación (5.14) ilustra nuestra notación. Nótese que la ecuación (5.13) puede ser escrita como

$$\sum_{\alpha=1}^{E}\int\limits_{\Omega_\alpha} u_\alpha\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_i}dx+\sum_{\alpha=1}^{E}\int\limits_{\Omega_\alpha} w_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}dx=\int\limits_{\partial\Omega} uwn_i dx-\int\limits_{\Gamma}\left(\dot{\widehat{u}}\,[[w]]+\dot{\widehat{w}}\,[[u]]\right)n_i dx \tag{5.15}$$

y, en particular, cuando $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ la ecuación previa queda como

$$\sum_{\alpha=1}^{E} \int\limits_{\Omega_\alpha} w_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} dx + \sum_{\alpha=1}^{E} \int\limits_{\Omega_\alpha} u_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_i} dx = - \int\limits_{\Gamma} w \, [[u]] \, n_i dx \tag{5.16}$$

El hecho que $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ implica que $[[w]] = 0$, y además $\dot{\widehat{w}} = w$, se obtiene el resultado anterior. Nótese que en la ecuación (5.15) se utilizó el algebra de saltos; que viene desarrollada en el siguiente capítulo (6).

5.3. Relación entre Diferentes Tipos de Espacios de Sobolev

Un problema básico que está adicionado en esta sección es como caracterizar el espacio $H^p(\Omega)$ como un subconjunto de $\widehat{H}^p(\Omega)$. En particular, una condición necesaria y suficiente para miembros $u \equiv (u_1, u_2, ..., u_E) \in \widehat{H}^p(\Omega)$ para ser miembros de $H^p(\Omega)$, serán dados.

Cuando $m \geq 1$ y $u \equiv (u_1, u_2, ..., u_E) \in \hat{H}^m(\Omega)$, las trazas de u_α, sobre $\partial\Omega_\alpha$, para cada $\alpha = 1, 2, ...E$, pertenecen a $L^2(\partial\Omega_\alpha)$ veáse [15]. Entonces, como se explico habiendo orientado la frontera interna Γ las funciones $u_+ \in L^2(\Gamma)$ y $u_- \in L^2(\Gamma)$, además el salto y el promedio através de Γ, están bien definidas.

Lema 22 *Sea* $u \in \hat{H}^1(\Omega)$, *entonces*

i. *Para cada una función* $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *se tiene que*

$$\sum_{\alpha=1}^{E} \int\limits_{\Omega_\alpha} \phi \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int\limits_{\Gamma} \phi \, [[u]] \, n_i dx \tag{5.17}$$

ii. $u \in H^1(\Omega)$ *si y sólo si* $[[u]] = 0$ *sobre* Γ.

El teorema de donde se obtiene este Lema viene dado en el apéndice B

5.4. Teorema de Green Generalizado

Un punto muy importante a considerar en las funciones definidas por tramos en un dominio Ω, es *la frontera interna* Γ. Para plantear el teorema de Green Generalizado, primero se plantea el Teorema de Green y después el Teorema de Gauss o de la divergencia.

Teorema 23 ***Green***. *Sea* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *una función de n-variables* $\in L^2(\Omega)$. *Considere una región* Ω *del espacio Euclidiano n-dimensional. Entonces*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} f(\underline{x})\, n_i d\underline{x} \tag{5.19}$$

donde $\underline{n}=(n_1, n_2, ..., n_n)$ *es el vector normal unitario que apunta hacia el exterior de* Ω.

El Teorema de la Gauss o de la Divergencia se deriva fácilmente del Teorema de Green.

Teorema 24 ***Gauss o de la Divergencia.*** *Sea* Ω *una región de* $\mathbb{R}^n$. *Entonces el teorema de Gauss establece que*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n} d\underline{x} \tag{5.20}$$

tal que $\underline{u}(x_1, x_2, ..., x_n) \in L^2(\Omega)$ *es una función vectorial de n variables.*

La divergencia se define como

$$\nabla \cdot \underline{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{5.21}$$

Demostración. El teorema se demuestra considerando las ecuaciones (5.19) y (5.21)

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i(\underline{x}) \cdot n_i d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} u(\underline{x}) \cdot \underline{n} d\underline{x}$$

■

Una versión más general del Teorema de Green, aplicable a campos vectoriales continuos por partes y con primeras derivadas también continuas por partes, se presenta a continuación. Más específicamente, supondremos que la función vectorial u y su primera derivada son continuas en cada una de las subregiones $\{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_E\}$, separadamente.

Teorema 25 ***Green generalizado.*** *Sea* Ω *una región de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $\Pi = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_E\}$ *una partición de* Ω*; es decir,* Ω_i *,*$\forall i = 1, 2, ..., E$ *es una subregión de* Ω*,* $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ *siempre que* $i \neq j$*, y* $\Omega \subset \cup_{i=1}^{E} \Omega_i$*. Además, en lo que sigue,* Γ *denota el complemento cerrado de* $\partial\Omega$*, en* $\bigcup\limits_{i=1}^{E} \partial\Omega_i$*. Entonces el teorema de Green generalizado establece que*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} dx = \int\limits_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n} dx - \int\limits_{\Gamma} [[\underline{u}]] \cdot \underline{n} dx$$

tal que $\underline{u}\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ *es una función vectorial de* n *variables continua por partes y con primera derivada continua por partes. Veáse figura (5.1)*

Su demostración viene dada en el apéndice A.

Capítulo 6

Fórmulas de Green - Herrera

La teoría algebraica de Herrera para problemas de valores de frontera (BVP), implica un tipo de operadores de extensión de gran generalidad. Estos operadores usan funciones de base y de peso completamente discontinuas que pueden ser aplicadas simultáneamente. Por ello es de importancia mostrar la formulacón Green-Herrera para operadores diferenciales. Primeramente se introduce la formulación Green como una introducción a las fórmulas Green-Herrera.

6.1. Fórmulas de Green

En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales se hace un uso extensivo de las fórmulas de Green, por ello en este capítulo presentamos primeramente las fórmulas de Green. Para plantear dichas fórmulas; dada la ecuación diferencial en forma general

$$\mathcal{L}u = f; \qquad \text{en } \Omega \tag{6.1}$$

donde $\mathcal{L}$ es un operador diferencial lineal, además están dadas ciertas condiciones de frontera en $\partial\Omega$, de manera que tenemos un problema bien planteado; es decir, se garantiza la existencia y unicidad de la solución.

Para este desarrollo consideraremos funciones escalares entonces; por definición un operador $\mathcal{L}$ y su adjunto formal $\mathcal{L}^*$ deben satisfacer la siguiente condición:

$$w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w = \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}(u, w) \tag{6.2}$$

donde $\underline{\mathfrak{D}}(u, w)$ es una función bilineal. Sea D_1 un espacio lineal de funciones base y D_2 como espacio lineal de funciones de peso. Si integramos la ecuación anterior en Ω y aplicamos el teorema de la divergencia se obtiene que

$$\int\limits_{\Omega} (w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \underline{\mathfrak{D}}(u, w) \cdot \underline{n} dx \tag{6.3}$$

entonces el procedimiento para construir las fórmulas de Green es descomponiendo el término derecho de la siguiente forma

$$\underline{\mathfrak{D}}(u, w) \cdot \underline{n} = \mathcal{B}(u, w) - \mathcal{C}^*(u, w) \tag{6.4}$$

Donde $\mathcal{B}(u, w)$ y $\mathcal{C}^*(u, w) = \mathcal{C}(w, u)$ son dos funciones bilineales definidas en $\partial\Omega$ de manera puntual; es decir que para cada $\underline{x} \in \partial\Omega$, éstas son funciones lineales en u y w separadamente, mientras que el asterisco designa a la transpuesta de la forma bilineal. $\mathcal{B}(u, w)$ incluye los valores de frontera (dato del problema) mientras que $\mathcal{C}^*(u, w)$ depende de los valores complementarios (no prescritos) de frontera.

Una vez introducida la descomposición de $\underline{\mathfrak{D}}(u, w) \cdot \underline{n}$, resulta entonces al sustituir en la ecuación (6.3) se obtienen las fórmulas de Green

$$\int\limits_{\Omega} w\mathcal{L}udx - \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w)\, dx = \int\limits_{\Omega} u\mathcal{L}^*wdx - \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w)\, dx \tag{6.5}$$

Definimos los siguientes operadores funcionales bilineales

$$\begin{aligned}
\langle Pu, w\rangle &= \int_{\Omega} w\mathcal{L}u dx \qquad (6.6)\\
\langle Q^{*}u, w\rangle &= \int_{\Omega} u\mathcal{L}^{*}w dx\\
\langle Bu, w\rangle &= \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}\left(u, w\right) dx\\
\langle C^{*}u, w\rangle &= \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^{*}\left(u, w\right) dx
\end{aligned}$$

según las definiciones anteriores, P, B, Q^{*} y C^{*} son funcionales bilineales reales definidas en $D_1 \times D_2$. Entonces la ecuación (6.5) se puede escribir como

$$\langle\left(P - B\right)u, w\rangle = \langle\left(Q^{*} - C^{*}\right)u, w\rangle \qquad (6.7)$$

que se satisface $\forall u \in D_1$ y $\forall w \in D_2$.

De una manera más compacta se puede escribir la ecuación (6.7) como

$$P - B \equiv Q^{*} - C^{*} \qquad (6.8)$$

Esta expresión representa la fórmula de Green para operadores en campos continuos.

A continuación se muestra un ejemplo de las fórmulas de Green para el operador Lapaciano

Ejemplo

Sea el operador Lapaciano dado de la siguiente forma

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right)$$

y el problema está dado como

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right) &= f_{\Omega}\\
u &= g \text{ en } \partial\Omega
\end{aligned}$$

sabemos que su operador adjunto es

$$\mathcal{L}^{*}w=-\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right)$$

y además la función bilineal es conocida

$$\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)=u\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w-w\underline{\underline{a}}\cdot\nabla u$$

ahora separemos la funcional bilineal

$$\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\cdot\underline{n}=\mathcal{B}\left(u,w\right)-\mathcal{C}^{*}\left(u,w\right)$$

tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\left(u,w\right)&=u\underline{a}_{n}\cdot\nabla w\\ \mathcal{C}^{*}\left(u,w\right)&=w\underline{a}_{n}\cdot\nabla u\end{aligned}$$

es decir, la funcional bilineal $\mathcal{B}\left(u,w\right)$ involucra valores de frontera (dato del problema) y $\mathcal{C}^{*}\left(u,w\right)$ depende de los valores complementarios (no prescritos) de frontera. Entonces se tiene que

$$\int_{\Omega}w\mathcal{L}udx-\int_{\partial\Omega}\mathcal{B}\left(u,w\right)dx=\int_{\Omega}u\mathcal{L}^{*}wdx-\int_{\partial\Omega}\mathcal{C}^{*}\left(u,w\right)dx$$

es equivalente a escribir

$$\int_{\Omega}-w\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\nabla u\right)dx-\int_{\partial\Omega}u\underline{a}_{n}\cdot\nabla wdx=\int_{\Omega}-u\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\nabla w\right)dx-\int_{\partial\Omega}w\underline{a}_{n}\cdot\nabla udx$$

Si adoptamos las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}Pu_{\Omega}&\equiv f\\ Bu_{\partial\Omega}&\equiv g\end{aligned}$$

Considerando las definiciones anteriores se tiene que

$$\left(P-B\right)u=f-g$$

esta ecuación es equivalente a

$$(Q-C)^* u = f - g$$

Nótese que las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como

$$\begin{aligned}\langle (P-B)\, u, w\rangle &= \langle f-g, w\rangle \qquad \forall w \in D_2 \\ \langle (Q-C)^*\, u, w\rangle &= \langle f-g, w\rangle \qquad \forall w \in D_2\end{aligned}$$

respectivamente. Estas ecuaciones exhiben más claramente el caracter variacional y ejemplifica de manera sistemática las fórmulas de Green. A continuación se presenta las fórmulación Green-Herrera para operadores en campos discontinuos.

6.2. Fórmulas de Green-Herrera

Sea Ω un dominio y $\Pi = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_E\}$ una partición de éste. Dada la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}u = f_\Omega, \text{ en } \Omega \tag{6.9}$$

donde $\mathcal{L}$ es un operador diferencial lineal con coeficientes clase C^∞. Además se proporcionan condiciones de frontera en $\partial\Omega$ y condiciones de salto en Γ, de tal modo que resulta un problema bien planteado, es decir, que tiene solución y ésta es única. Las condiciones de salto se refieren a discontinuidades finitas de la función u en Γ. El problema enunciado se denomina *Problema de Contorno con Saltos Preescritos.*

Si $u \in D_1(\Omega)$ entonces la ecuación diferencial $\mathcal{L}u$ está definida en el interior de cada Ω_i para $i = 1, 2, ...E$. De igual forma, $w \in D_2(\Omega)$ entonces $\mathcal{L}^*w$ está definido en el interior de cada Ω_i, para $i = 1, 2, ...E$. Ambos operadores diferenciales podrian no estar definidos en $\Gamma \cup \partial\Omega$.

El operador diferencial $\mathcal{L}$ y su operador diferencial adjunto formal $\mathcal{L}^*$ satisfacen la igualdad:

$$w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w = \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}(u, w) \tag{6.10}$$

donde $\underline{\mathfrak{D}}(u,w)$ es una función bilineal definida en $D_1(\Omega)\times\ D_2(\Omega)$. Si se integra la ecuación (6.10) en cada Ω_i para $i=1,2,...E$, y se considera $\overline{\Omega}=\bigcup\limits_{i=1}^{E}\overline{\Omega}_i$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i}(w\mathcal{L}u-u\mathcal{L}^*w)\,d\underline{x}=\sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i}\nabla\cdot\underline{\mathfrak{D}}(u,w)\,dx \tag{6.11}$$

Aplicando el teorema generalizado de la divergencia en el lado derecho de la ecuación (6.11), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i}w\mathcal{L}udx-\sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i}u\mathcal{L}^*wdx=\int\limits_{\partial\Omega}\underline{\mathfrak{D}}(u,w)\cdot\underline{n}dx-\int\limits_{\Gamma}[[\underline{\mathfrak{D}}(u,w)]]\cdot\underline{n}dx \tag{6.12}$$

Desarrollando el algebra de saltos en el segundo sumando del lado derecho de la ecuación (6.12) se tiene la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i}w\mathcal{L}udx-\sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i}u\mathcal{L}^*wdx \qquad\qquad (6.13)\\ =&\int\limits_{\partial\Omega}\underline{\mathfrak{D}}(u,w)\cdot\underline{n}dx-\int\limits_{\Gamma}\underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}},[w]\right)\cdot\underline{n}dx-\int\limits_{\Gamma}\underline{\mathfrak{D}}\left([[u]],\dot{\widehat{w}}\right)\cdot\underline{n}dx\end{aligned}$$

Nótese que en la ecuación anterior se ha utilizado el algebra de saltos dada por la siguiente expresión

$$[[\underline{\mathfrak{D}}(u,w)]]=\underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}},[[w]]\right)+\underline{\mathfrak{D}}\left([[u]],\dot{\widehat{w}}\right)$$

su demostración viene dada en la sección (6.3).

Ahora para poder usar las fórmulas de Green, se introducen las siguientes funcionales bilineales reales definidas en $D_1(\Omega)\times D_2(\Omega)$. Sean las funcionales bilineales $\mathcal{B}(u,w), \mathcal{C}^*(u,w), \mathcal{J}(u,w)$ y $\mathcal{K}^*(u,w)$ tales que producen las siguientes descomposiciones de los términos de la ecuación (6.13)

$$\underline{\mathfrak{D}}(u,w)\cdot\underline{n} \equiv \mathcal{B}(u,w) - \mathcal{C}^*(u,w) \qquad \text{en } \partial\Omega \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}}, [[w]]\right)\cdot\underline{n} &\equiv \mathcal{K}^*(u,w) && \text{en } \Gamma \\ -\underline{\mathfrak{D}}\left([[u]], \dot{\widehat{w}}\right)\cdot\underline{n} &\equiv \mathcal{J}(u,w) && \text{en } \Gamma \end{aligned} \tag{6.15}$$

Aquí $\mathcal{C}^*(u,w)$ es la transpuesta de la funcional bilineal $\mathcal{C}(w,u)$ y se define como $\mathcal{C}^*(u,w) \equiv \mathcal{C}(w,u)$; de igual manera para $\mathcal{K}^*(u,w) \equiv \mathcal{K}(w,u)$. La funcional bilineal $\mathcal{B}(u,w)$ está en función de los valores de frontera (condiciones de frontera y condiciones iniciales), mientras que $\mathcal{C}^*(u,w)$ involucra los valores desconocidos en $\partial\Omega$ (información desconocida).

Rescribiendo la ec (6.13) en términos de las descomposiciones de $\underline{\mathfrak{D}}(u,w)\cdot\underline{n}$ y $[[\underline{\mathfrak{D}}(u,w)]]\cdot\underline{n}$ dadas en las ecuaciones (6.14) y (6.15) respectivamente, entonces se obtiene la siguiente Fórmula Green-Herrera

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{E}\int_{\Omega_i} w\mathcal{L}u dx - \int_{\partial\Omega}\mathcal{B}(u,w)\,dx - \int_{\Gamma}\mathcal{J}(u,w)\,dx \\ = &\sum_{i=1}^{E}\int_{\Omega_i} u\mathcal{L}^* w dx - \int_{\partial\Omega}\mathcal{C}^*(u,w)\,dx - \int_{\Gamma}\mathcal{K}^*(u,w)\,dx \end{aligned} \tag{6.16}$$

A continuación se introduce la siguiente notación,

$$\begin{aligned} \langle Pu, w\rangle &= \sum_{i=1}^{E}\int_{\Omega_i} w\mathcal{L}u dx \\ \langle Q^* u, w\rangle &= \sum_{i=1}^{E}\int_{\Omega_i} u\mathcal{L}^* w dx \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$
\begin{aligned}
\langle Bu, w\rangle &= \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{B}\left(u, w\right) dx \\
\langle C^{*}u, w\rangle &= \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{C}^{*}\left(u, w\right) dx \\
\langle Ju, w\rangle &= \int\limits_{\Gamma} \mathcal{J}\left(u, w\right) dx \\
\langle K^{*}u, w\rangle &= \int\limits_{\Gamma} \mathcal{K}^{*}\left(u, w\right) dx
\end{aligned}
$$

De acuerdo a las definiciones de las ecuaciones (6.17), $P, B, J, Q^{*}, C^{*}, K^{*}$ son funcionales bilineales definidos en $D_1\left(\Omega\right) \times D_2\left(\Omega\right)$ y entonces se puede escribir la ec(6.16) como

$$
\langle \left(P - B - J\right) u, w\rangle = \langle \left(Q^{*} - C^{*} - K^{*}\right) u, w\rangle \tag{6.18}
$$

que se satisface $\forall u \in D_1\left(\Omega\right)$ y $\forall w \in D_2\left(\Omega\right).$

De manera más compacta se puede escribir como

$$
P - B - J = Q^{*} - C^{*} - K^{*} \tag{6.19}
$$

Esta expresión representa la **Formula Green-Herrera** para operadores en campos discontinuos.

Los funcionales bilineales P, B, J, Q^{*}, C^{*} y K^{*} tambien pueden ser vistos como operadores funcionales lineales definidos en $D_1\left(\Omega\right)$ y que toman valores en $D_2^{*}\left(\Omega\right)$, es decir, $P : D_1\left(\Omega\right) \longrightarrow D_2^{*}\left(\Omega\right)$, donde $Pu \in D_2^{*}\left(\Omega\right)$ es una funcional lineal definida en $D_1\left(\Omega\right)$. De manera similar sucede para las transpuestas de estos funcionales bilineales $P^{*}, B^{*}, J^{*}, Q, C$ y K los cuales son operadores funcionales lineales que toman valores en $D_1^{*}\left(\Omega\right)$ y están definidos en $D_2\left(\Omega\right).$

Nótese que para resolver el problema (6.9) es necesario plantear solo el lado izquierdo de la ecuación (6.18), es decir, el directo

$$\begin{aligned} Pu &= f, \\ Bu &= g \\ J &= j \end{aligned}$$

entonces se tiene que el problema de valores en la frontera con saltos se puede escribir como

$$(P - B - J)\, u = f - g - j$$

veáse ([12]).

6.3. Salto de un Operador Bilineal

Salto de un operador funcional bilineal con coeficientes continuos implica que

$$[[\underline{\mathfrak{D}}\,(u, w)]] = \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}}, [[w]]\right) + \underline{\mathfrak{D}}\left([[u]]\,, \dot{\widehat{w}}\right) \tag{6.20}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} [[\underline{\mathfrak{D}}\,(u, w)]] &= \underline{\mathfrak{D}}\,(u_+, w_+) - \underline{\mathfrak{D}}\,(u_-, w_-) \\ &= \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}} + \frac{1}{2}\,[[u]]\,, \dot{\widehat{w}} + \frac{1}{2}\,[[w]]\right) - \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}} - \frac{1}{2}\,[[u]]\,, \dot{\widehat{w}} - \frac{1}{2}\,[[w]]\right) \end{aligned}$$

Aquí se consideró la definición del valor de la función u por la derecha y por la izquierda, es decir

$$u_+ = \dot{\widehat{u}} + \frac{1}{2}\,[[u]] \quad \text{y} \quad u_- = \dot{\widehat{u}} - \frac{1}{2}\,[[u]]$$

Puesto que $\underline{\mathfrak{D}}\,(u, w)$ es bilineal, se obtiene

$$\underline{\mathfrak{D}}\,(u_+, w_+) = \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}}, \dot{\widehat{w}}\right) + \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}}, \frac{1}{2}\,[[w]]\right) + \underline{\mathfrak{D}}\left(\frac{1}{2}\,[[u]]\,, \dot{\widehat{w}}\right) + \underline{\mathfrak{D}}\left(\frac{1}{2}\,[[u]]\,, \frac{1}{2}\,[[w]]\right) \tag{6.21}$$

$$\underline{\mathfrak{D}}\left(u_-, w_-\right) = \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}}, \dot{\widehat{w}}\right) - \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}}, \frac{1}{2}\left[\left[w\right]\right]\right) - \underline{\mathfrak{D}}\frac{1}{2}\left[\left[u\right]\right], \dot{\widehat{w}} + \underline{\mathfrak{D}}\left(\frac{1}{2}\left[\left[u\right]\right], \frac{1}{2}\left[\left[w\right]\right]\right) \tag{6.22}$$

Sumando las ecuaciones (6.21) y (6.22) se tiene que

$$\left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u, w\right)\right]\right] = \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}}, \left[\left[w\right]\right]\right) + \underline{\mathfrak{D}}\left(\left[\left[u\right]\right], \dot{\widehat{w}}\right)$$

■

Salto de un operador funcional con coeficientes discontinuos implica que

$$\left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u, w\right)\right]\right] = \underline{\mathfrak{D}}_+\left(u, w\right) - \underline{\mathfrak{D}}_-\left(u, w\right) \tag{6.23}$$

es decir, es la evaluación de los coeficientes del operador funcional por ambos lados de Γ. En nuestro caso se considerarán sólo operadores funcionales bilineales con coeficientes continuos.

Capítulo 7

Relación de las Derivadas Distribucionales y las Fórmulas de Green-Herrera en Espacios $H^2(\Omega)$

Una situación muy importante a mencionar es que en la definición de derivadas distribucionales definidas previamente nunca se discutieron casos en los cuales las funciones sean discontinuas. Por ello es de interés en este trabajo mostrar la importancia de la **fórmulas de Green-Herrera** como una extensión de las derivadas distribucionales**.** En lo que sigue se considerará la partición

$\Pi = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_E\}$.

Primeramente identificamos el espacio $\widehat{H}^2(\Omega)$ para ello se tiene que

$$\widehat{H}^2(\Omega) = H^2(\Omega_1) \oplus H^2(\Omega_2) \oplus \cdots \oplus H^2(\Omega_E) \tag{7.1}$$

tal que $H^2(\Omega_i)$ es el espacio de Sobolev para cada subdominio Ω_i, y está definido como

$$H^2(\Omega_i) = \{u \mid D^\alpha u \in L_2(\Omega_i) \quad \forall\alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq 2\} \qquad \forall i = 1, 2, ...E \tag{7.2}$$

A continuación se muestra un ejemplo de las fórmulas Green-Herrera como una extensión de las derivadas distribucionales.
¿Cuál es la derivada distribucional para funciones $u \in \widehat{H}^2(\Omega)$? Para resolver esta pregunta se planteará un ejemplo de como obtener la derivada distribucional partiendo de la definición en el sentido ordinario.

Consideremos que Tu es una derivada distribucional de una función u. Si se tiene la siguiente ecuación

$$\int_{\Omega} \phi T u dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{7.3}$$

Hallar la derivada distribucional Tu.
Para hallar Tu, consideremos el lado derecho de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial (u\phi)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{j=1}^{E} \int_{\partial \Omega_j} u \phi n_i dx - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\ &= -\int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \phi [u] n_i dx \end{aligned} \tag{7.4}$$

Aquí se tomo en cuenta la identidad

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{E} \int_{\partial \Omega_j} u \phi n_i dx &= \int_{\partial \Omega} u \phi n_i dx - \int_{\Gamma} [[u\phi]] n_i dx \\ &= \int_{\partial \Omega} u \phi n_i dx - \int_{\Gamma} \dot{\widehat{u}} [[\phi]] n_i dx - \int_{\Gamma} [[u]] \dot{\widehat{\phi}} n_i dx \\ &= -\int_{\Gamma} [[u]] \phi n_i dx \end{aligned} \tag{7.5}$$

esto último, es por que $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces la integral de frontera exterior $\partial\Omega$, se anula, además $[[\phi]] = 0$ por lo que el segundo término del lado derecho es nulo y además $\widehat{\dot{\phi}} = \phi$. Por lo tanto se tiene que

$$\int_{\Omega} \phi T u dx = \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} \phi \left[\left[u\right]\right] n_i dx \tag{7.6}$$

Es decir, la acción de ϕ sobre Tu es igual a la acción de ϕ sobre $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ en el dominio Ω, más la acción de ϕ sobre $[[u]]\, n_i$ en la frontera interior. Lo cual puede escribirse como

$$\langle \phi, Tu \rangle_{\Omega} = \left\langle \phi, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle_{\Omega} + \langle \phi, [[u]]\, n_i \rangle_{\Gamma} \tag{7.7}$$

Por lo tanto se ha encontrado el valor de la derivada distribucional Tu la cual involucra a derivadas de primer orden y el salto de la función en la frontera interior. Este es el ejemplo más sencillo para mostrar una parte importante de las derivadas distribucionales en el sentido más amplio, es decir, considerando funciones discontinuas que es un caso de las fórmulas Green-Herrera.
Si consideramos la definición de derivada distribucional de la forma que se encuentra en la literatura se tiene que

$$\langle D^{\alpha} u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^{\alpha} \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{7.8}$$

entonces retomando el ejemplo de la ecuación (7.1) se tiene que $D^{\alpha}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, es decir $\alpha = 1$, por lo tanto se tiene que el lado derecho de la ecuación anterior es

$$(-1)^{|1|} \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = \int_{\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \tag{7.9}$$

Por lo tanto se ha encontrado la derivada distribucional para la función u escrita como viene en la literatura. En la siguiente sección se considerarán derivadas distribucionales en el sentido más general, es decir, en el sentido de operadores diferenciales.

7.1. Extension de las Derivadas Distribucionales para Operadores Diferenciales

En relación a la definición de operador diferencial lineal y su adjunto $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^*$ respectivamente; ellos se considerarán en el sentido distribucional, y entonces si ellos son de orden m, ambos $\int\limits_{\Omega_i} w\mathcal{L}udx$ y $\int\limits_{\Omega_i} u\mathcal{L}^*wdx$ están bien definidos para cada $i = 1, 2, ...E$.

En esta sección consideraremos derivadas distribucionales tomando en cuenta operadores diferenciales, es decir,

$$D^\alpha u = \mathcal{L}u \tag{7.10}$$

entonces se tiene que

$$\int\limits_\Omega wD^\alpha udx = \int\limits_\Omega w\mathcal{L}udx \tag{7.11}$$

tal que $w \in \mathcal{D}(\Omega)$. Recordemos la definición de operador adjunto formal

$$w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w = \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}\,(u, w) \tag{7.12}$$

tal que $\underline{\mathfrak{D}}(u, w)$ es una funcional bilineal. De la ecuación (7.11) se tiene que

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega wD^\alpha udx &= \int\limits_\Omega w\mathcal{L}udx \\ &= \int\limits_\Omega u\mathcal{L}^*wdx + \int\limits_\Omega \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}\,(u, w)\, dx \end{aligned} \tag{7.13}$$

Además se tiene que

$$\int\limits_\Omega u\mathcal{L}^*wdx = \sum_{i=1}^{E} \int\limits_{\Omega_i} u\mathcal{L}^*wdx \tag{7.14}$$

Retomando la ecuación (7.12) e integrando ambos lados sobre Ω_i se tiene

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_i} w\mathcal{L}udx &= \int\limits_{\Omega_i} u\mathcal{L}^* wdx + \int\limits_{\Omega_i} \left\{\nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\right\} dx \\ &= \int\limits_{\Omega_i} u\mathcal{L}^* wdx + \int\limits_{\partial\Omega_i} \underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right) \cdot \underline{n} dx\end{aligned} \tag{7.15}$$

Sumando el segundo término sobre los subdominios Ω_i se tiene que

$$\sum_{i=1}^{E} \int\limits_{\partial\Omega_i} \underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right) \cdot \underline{n} dx = \int\limits_{\partial\Omega} \underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right) \cdot \underline{n} dx - \int\limits_{\Gamma} \left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\right]\right] \cdot \underline{n} dx \tag{7.16}$$

Por lo tanto la ecuación (7.15) se puede reescribir como

$$\int\limits_{\Omega} w\mathcal{L}udx = \int\limits_{\Omega} u\mathcal{L}^* wdx + \int\limits_{\partial\Omega} \underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right) \cdot \underline{n} dx - \int\limits_{\Gamma} \left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\right]\right] \cdot \underline{n} dx \tag{7.17}$$

Esto implica que

$$\int\limits_{\Omega} wD^{\alpha}udx = \int\limits_{\Omega} u\mathcal{L}^* wdx + \int\limits_{\partial\Omega} \underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right) \cdot \underline{n} dx - \int\limits_{\Gamma} \left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\right]\right] \cdot \underline{n} dx \tag{7.18}$$

Es decir, la acción de la función w sobre la derivada distribucional $D^{\alpha}u$ es igual a la acción de la función u sobre el operador diferencial adjunto $\mathcal{L}^*$ aplicado a la función w, más la acción de la funcional bilineal aplicada a u y w sobre la frontera exterior, más el termino que involucra a la funcional lineal para funciones discontinuas sobre la frontera interna Γ. Nótese que los integrandos correspondientes a las integrales sobre $\partial\Omega$ y Γ, del lado derecho son conocidos.

En este momento estamos en condiciones de mostrar los resultados teóricos con ejemplos de una manera sistemática

Ejemplo 1 Considérese el operador diferencial Laplaciano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u &= f \text{ en } \Omega \\ u &= g \text{ sobre } \partial\Omega\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}u = -\Delta u \tag{7.19}$$

Entonces sustituyendo en la ecuación (7.19) se tiene que

$$D^{\alpha}u = -\Delta u \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} wD^{\alpha}udx &= \qquad (7.21)\\ &\int\limits_{\Omega} u\mathcal{L}^{*}wdx + \int\limits_{\partial\Omega} \underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\cdot \underline{n}dx - \int\limits_{\Gamma}\left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\right]\right]\cdot\underline{n}dx \\ &= -\int\limits_{\Omega} u\Delta wdx + \int\limits_{\partial\Omega} \underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\cdot \underline{n}dx - \int\limits_{\Gamma}\left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\right]\right]\cdot\underline{n}dx\end{aligned}$$

Del capítulo (3) se tiene que para un operador diferencial Laplaciano la funcional bilineal $\underline{\mathfrak{D}}(u,w)$ y su salto $\left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\right]\right]$, están dados como

$$\begin{aligned}\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right) &= u\nabla w - w\nabla u \qquad (7.22)\\ \left[\left[\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\right]\right] &= \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}},\left[\left[w\right]\right]\right) + \underline{\mathfrak{D}}\left(\left[\left[u\right]\right],\dot{\widehat{w}}\right) \\ &= \left(\dot{\widehat{u}}\left[\left[\nabla w\right]\right] - \left[\left[w\right]\right]\dot{\widehat{\nabla u}}\right) + \left(\left[\left[u\right]\right]\dot{\widehat{\nabla w}} - \dot{\widehat{w}}\left[\left[\nabla u\right]\right]\right)\end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} wD^{\alpha}udx &= \int\limits_{\Omega} -u\Delta wdx + \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\nabla w - w\nabla u\right)\cdot\underline{n}dx - \qquad (7.23)\\ &\int\limits_{\Gamma}\left(\dot{\widehat{u}}\left[\left[\nabla w\right]\right] - \left[\left[w\right]\right]\dot{\widehat{\nabla u}}\right) + \left(\left[\left[u\right]\right]\dot{\widehat{\nabla w}} - \dot{\widehat{w}}\left[\left[\nabla u\right]\right]\right)\cdot\underline{n}dx\end{aligned}$$

Nótese que este es un ejemplo sencillo en el cual se ilustra de manera general las fórmulas de Green-Herrera como una extensión de las derivadas distribucionales, donde se considera funciones de base y de peso discontinuas.

Recordemos que las fórmulas Green-Herrera aplicadas al operador Lapaciano se pueden expresar en terminos de operadores de la forma directa

$$\langle (P - B - J)\, u, w \rangle$$

entonces identificando a estos operadores se tiene que

$$P - B - J = \underbrace{\int_{\Omega} -w\Delta u dx}_{P} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial w}{\partial n} dx}_{B} - \underbrace{- \int_{\Gamma} \left([[u]]\, \dot{\widehat{\nabla w}} - \dot{\widehat{w}}\, [[\nabla u]] \right) \cdot \underline{n} dx}_{J} \tag{7.24}$$

Por lo tanto las fórmulas Green- Herrera son un caso más general de las derivadas distribucionales ya que consideran que las funciones de peso w también pueden ser discontinuas.

Ejemplo 2 Operador diferencial más general de 2^{do} orden

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u &= f \text{ en } \Omega \qquad (7.25)\\
u &= g \text{ sobre } \partial\Omega\\
\mathcal{L}u &= -\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}}\nabla u\right) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu
\end{aligned}$$

Primeramente identificamos el operador como una derivada distribucional

$$D^{\alpha}u = -\nabla \cdot \underline{\underline{a}}\nabla u + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu$$

Además se tiene que la función bilineal y su salto están dados por

$$\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{D}}\,(u, w) &= \underline{\underline{a}} \cdot (u\nabla w - w\nabla u) + \underline{b}uw\\
[[\underline{\mathfrak{D}}\,(u, w)]] &= \underline{\mathfrak{D}}\left(\dot{\widehat{u}}, [[w]]\right) + \underline{\mathfrak{D}}\left([[u]]\,, \dot{\widehat{w}}\right)
\end{aligned}$$

Cuando son multiplicados por la normal exterior $\underline{n}$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{D}}(u,w)\cdot\underline{n} &= \underline{a}_n\cdot(u\nabla w - w\nabla u) + b_n uw \\
\mathcal{B}(u,w) &= u\left(\underline{a}_n\nabla w + b_n w\right) \\
\mathcal{J}(u,w) &= -\underline{\mathfrak{D}}\left([[u]],\dot{\widehat{w}}\right)\cdot\underline{n} = -\left([[u]]\,\overline{\underline{a}_n\nabla w + b_n w}^{\,\cdot} - \dot{\widehat{w}}\,[[\underline{a}_n\nabla u]]\right)
\end{aligned}$$

Nótese que $\underline{a}_n$ y b_n es el resultado de multiplicar la matriz $\underline{\underline{a}}$ y el vector $\underline{b}$ por la normal exterior. Además consideremos el operador adjunto que está dado como sigue

$$\mathcal{L}^*w = -\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right) - \underline{b}\cdot\nabla w + cw$$

entonces

$$\int_\Omega wD^\alpha u dx =$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u\mathcal{L}^*w dx + \int_{\partial\Omega}\underline{\mathfrak{D}}(u,w)\cdot\underline{n}dx - \int_\Gamma [[\underline{\mathfrak{D}}(u,w)]]\cdot\underline{n}dx = \qquad (7.26)\\
&\int_\Omega u\left(-\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right) - \underline{b}\cdot\nabla w + cw\right)dx + \\
&\int_{\partial\Omega}\left(\underline{a}_n\cdot(u\nabla w - w\nabla u) + b_n uw\right)dx - \\
&\int_\Gamma [[\underline{a}_n\nabla w + b_n w]]\,\dot{\widehat{u}} - [[w]]\,\dot{\widehat{\underline{a}_n\nabla u}}dx + \int_\Gamma [[u]]\,\overline{\underline{a}_n\nabla w + b_n w}^{\,\cdot} - \dot{\widehat{w}}\,[[\underline{a}_n\nabla u]]\,dx
\end{aligned}$$

La ecuación anterior es un ejemplo más de las fórmulas de Green-Herrera como una extensión de las derivadas distribucionales.

Escrita en términos de los operadores funcionales

$$\langle (P-B-J)\,u,w\rangle$$

Identificamos

$$\langle Pu,w\rangle = \sum_{i=1}^{E}\int_{\Omega_i} w\mathcal{L}u dx = \sum_{i=1}^{E}\int_{\Omega_i} w\left(-\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\nabla u\right) + \nabla\cdot(\underline{b}u) + cu\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
\langle Bu, w\rangle &= \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{B}\left(u, w\right) dx = \int\limits_{\partial\Omega} u\left(\underline{\underline{a}}_n \nabla w + b_n w\right) dx \\
\langle Ju, w\rangle &= \int\limits_{\Gamma} \mathcal{J}\left(u, w\right) dx = \int\limits_{\Gamma} -\left([[u]]\, \dot{\overline{\underline{\underline{a}}_n \nabla w + b_n w}} - \dot{\widehat{w}}\, [[\underline{\underline{a}}_n \nabla u]] \right) dx
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

Nótese que el simbolo $\dot{\overline{u}}$ y $\dot{\widehat{u}}$ denotan el promedio.

Capítulo 8

Revisión de las Formulaciones FEM, Green-Herrera y GD

En esta sección se hace un análisis de los métodos de elementos finitos FEM estándar, la formulación Green-Herrera y el método Galerkin Discontinuo DG. El operador con el cual se hace dicho análisis es el operador diferencial más general de segundo orden. Primeramente se hace el desarrollo del método FEM, posteriormente la formulación Green-Herrera y se concluye con el método GD. Y al final se hace la comparación de los tres métodos.

8.1. Método de Elementos Finitos

A continuación se hace el desarrollo del operador elíptico más general de segundo orden con la metodología estándar de FEM.
Considérese el operador diferencial

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u &= f \text{ en } \Omega \qquad (8.1)\\
u &= g \text{ sobre } \partial\Omega \\
\mathcal{L}u &= -\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\nabla u\right) + \nabla\cdot\left(\underline{b}u\right) + cu \quad \text{definido en } \Omega
\end{aligned}$$

Entonces, multiplicando el operador $\mathcal{L}u$ por una función $w(x)$ se tiene

$$w\mathcal{L}u = -w\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\nabla u\right) + w\nabla\cdot\left(\underline{b}u\right) + wcu$$

Ahora integrando sobre el dominio Ω obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(-w\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}}\nabla u\right) + w\nabla \cdot (\underline{b}u) + wcu\right) dx \qquad (8.2) \\ = &\int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u\right) + \nabla w \cdot \underline{\underline{a}}\nabla u + \nabla \cdot (w\underline{b}u) - \underline{b}u\nabla w + wcu\right) dx \end{aligned}$$

Al usar el teorema de Gauss se tiene que la expresión anterior se puede escribir como

$$\int_{\Omega} \left(\nabla w \cdot \underline{\underline{a}}\nabla u - \underline{b}u\nabla w + wcu\right) dx - \int_{\partial\Omega} w \left(\underline{\underline{a}}\nabla u - \underline{b}u\right) \cdot \underline{n} dx = \int_{\Omega} f w dx \quad (8.3)$$

La integral de frontera y lado derecho son conocidos dado que conocemos a la función f y las condiciones de frontera para la función w. Con el supuesto que las funciones w se anulan en la frontera, se tiene que la ecuación anterior se puede escribir como

$$\int_{\Omega} \left(\nabla w \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla u - \underline{b}u\nabla w + wcu\right) dx = \int_{\Omega} f w dx \qquad (8.4)$$

A continuación se propone una solución aproximada de la siguiente forma $u = u_0 + v$ donde $u_0 = g$ sobre $\partial\Omega$. Entonces sustituyendo la solución aproximada en la ec. (8.4) se tiene que

$$\int_{\Omega} \left(\nabla w \cdot \underline{\underline{a}}\nabla v - \underline{b}v\nabla w + wcv\right) dx = \qquad (8.5)$$

$$\int_{\Omega} f w dx - \int_{\Omega} \left(\nabla w \cdot \underline{\underline{a}}\nabla u_0 - \underline{b}u_0\nabla w + wcu_0\right) dx$$

Necesitamos elegir un espacio dimensionalmente finito V_N generado por funciones base $\{w_1, w_2, \ldots w_N\}$, y se propone la siguiente aproximación a la función v

$$\widehat{v}(x) = \sum_{j=1}^{N} v_j w_j(x) \simeq v(x) \qquad (8.6)$$

tal que v_j son los coeficientes que se tienen que encontrar, y w_j son las funciones base. Para los intereses de este trabajo consideraremos la ecuación (8.3) para hacer las comparaciones.

8.2. Formulación Green-Herrera

El problema es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \text{ en } \Omega \qquad (8.7)\\ u &= g \text{ sobre } \partial\Omega \\ \mathcal{L}u &= -\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}}\nabla u\right) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu \quad \text{definido en } \Omega \end{aligned}$$

Para esta formulación sólo reescribiremos la ecuación (7.26), entonces se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} wD^{\alpha}u dx \qquad (8.8)\\ = &\int_{\Omega} u\left(-\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla w\right) - \underline{b} \cdot \nabla w + cw\right) dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(\underline{a}_n \cdot (u\nabla w - w\nabla u) + b_n uw\right) dx - \\ &\int_{\Gamma} [[\underline{a}_n \nabla w + b_n \phi]] \dot{\widehat{u}} - [[w]]\, \dot{\overline{\underline{a}_n \nabla u}} dx + \int_{\Gamma} [[u]]\, \dot{\overline{\underline{a}_n \nabla w + b_n \phi}} - \dot{\widehat{w}}\, [[\underline{a}_n \nabla u]]\, dx \end{aligned}$$

Desarrollamos la integral sobre el dominio Ω

$$\int\limits_{\Omega} u\left(-\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right)-\underline{b}\cdot\nabla w+cw\right)dx \tag{8.9}$$
$$= \int\limits_{\Omega} \nabla u\cdot\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w-u\underline{b}\cdot\nabla w+cuw-\nabla\cdot\left(u\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right)dx$$
$$= \int\limits_{\Omega} \left(\nabla u\cdot\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w-u\underline{b}\cdot\nabla w+cuw\right)dx$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right)\cdot\underline{n}dx+\int\limits_{\Gamma}\left[\left[u\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right]\right]dx$$

al sustituir en la ecuación (8.9) se tiene

$$\int\limits_{\Omega} wD^{\alpha}udx \tag{8.10}$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(\nabla u\cdot\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w-u\underline{b}\cdot\nabla w+cuw\right)dx-\int\limits_{\Omega}\left(u\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right)\cdot\underline{n}dx$$
$$+\int\limits_{\Gamma}\left[\left[u\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w\right]\right]dx+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\underline{a}_n\cdot\left(u\nabla w-w\nabla u\right)+b_nuw\right)dx-$$
$$\int\limits_{\Gamma}\left[\left[\underline{a}_n\nabla w+b_nw\right]\right]\dot{\widehat{u}}-\left[\left[w\right]\right]\dot{\overline{\underline{a}_n\nabla u}}dx+\int\limits_{\Gamma}\left[\left[u\right]\right]\dot{\overline{\underline{a}_n\nabla w+b_nw}}-\dot{\widehat{w}}\left[\left[\underline{a}_n\nabla u\right]\right]dx$$

Eliminando términos iguales la ecuación anterior queda como

$$\int\limits_{\Omega} wD^{\alpha}udx \tag{8.11}$$
$$= \int\limits_{\Omega}\left(\nabla u\cdot\underline{\underline{a}}\cdot\nabla w-u\underline{b}\cdot\nabla w+cuw\right)dx-\int\limits_{\partial\Omega}w\left(\underline{a}_n\cdot\nabla u-b_nu\right)dx$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\left[\left[b_nw\right]\right]\dot{\widehat{u}}+\left[\left[u\right]\right]\dot{\widehat{b_nw}}dx+\int\limits_{\Gamma}\dot{\widehat{w}}\left[\left[\underline{a}_n\nabla u\right]\right]+\left[\left[w\right]\right]\dot{\overline{\underline{a}_n\nabla u}}dx$$

Que es la Formulación general del **Método Green-Herrera** para el operador diferencial más general de segundo orden.

Por último hacemos el desarrollo considerando el Método Galerkin Discontinuo DG.

8.3. Método Galerkin Discontinuo Directo

Para hacer la comparación de los métodos se realizará la formulación directa. Entonces dado el problema siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \text{ en } \Omega \\ u &= g \text{ sobre } \partial\Omega \\ \mathcal{L}u &= -\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\cdot\nabla u\right)+\nabla\cdot\left(\underline{b}u\right)+cu \quad \text{definido en } \Omega \end{aligned} \tag{8.12}$$

Se define un salto y un promedio que será usado para este método

$$[[u]] = \left(u \mid \Omega_2\right)_e - \left(u \mid \Omega_1\right)_e \tag{8.13}$$

y el promedio de u sobre e está dado como

$$\dot{\widehat{u}} = \frac{1}{2}\left(\left(u \mid \Omega_1\right)_e + \left(u \mid \Omega_2\right)_e\right) \tag{8.14}$$

y la normal unitaria $\underline{n}$ es exterior a Ω_2.
Entoces empezamos por multiplicar el operador $\mathcal{L}$ por una función $w \in H^2\left(\Omega_i\right)$ e integrando sobre cada subdominio Ω_i

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega_i}\left(-w\nabla\cdot\left(\underline{\underline{a}}\cdot\nabla u\right)+w\nabla\cdot\left(\underline{b}u\right)+wcu\right)dx \\ =& \int\limits_{\Omega_i}\left(-\nabla\cdot\left(w\underline{\underline{a}}\cdot\nabla u\right)+\nabla w\cdot\underline{\underline{a}}\cdot\nabla u+\nabla\cdot\left(w\underline{b}u\right)-\underline{b}u\nabla w+wcu\right)dx \end{aligned} \tag{8.15}$$

aplicando la fórmula de divergencia la expresión anterior es

$$\int\limits_{\partial\Omega_i}\left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx + \int\limits_{\Omega_i}\nabla w\cdot\underline{\underline{a}}\nabla u - \underline{b}u\nabla w + wcudx = \int\limits_{\Omega_i} fwdx \tag{8.16}$$

ahora sumando sobre todos los $\Omega_i \in \Omega$ obtenemos

$$-\sum_{i=1}^{E} \int\limits_{\partial\Omega_i} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx+\sum_{i=1}^{E} \int\limits_{\Omega_i} \nabla w\cdot\underline{\underline{a}}\nabla u-\underline{b}u\nabla w+wcudx = \sum_{i=1}^{E} \int\limits_{\Omega_i} fwdx \tag{8.17}$$

Nótese que las integrales de frontera pueden ser separadas como sigue

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{E} \int\limits_{\partial\Omega_i} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx &= \sum_{e\in\partial\Omega_i^D} \int\limits_{e} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx + \\
& \sum_{e\in\partial\Omega_i^\Gamma} \int\limits_{\partial\Omega_1\cap e} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx + \\
& \sum_{e\in\partial\Omega_i^\Gamma} \int\limits_{\partial\Omega_2\cap e} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx
\end{aligned} \tag{8.18}$$

tal que $\partial\Omega_i^D$ corresponde a la frontera exterior, en este caso es Dirichlet y $e = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\Omega_1, \Omega_2 \in \Omega$. Por simplicidad de notación escribimos

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in\Omega_i^D} \int\limits_{e} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx &= \int\limits_{\partial\Omega^D} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx \\
&= \left\langle\left(\underline{\underline{a}}\nabla u - \underline{b}u\right)\cdot\underline{n}, w\right\rangle_{\partial\Omega^D}
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Por otro lado para $e = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, junto con la condición de salto y la correspondiente normal unitaria $\underline{n}$ sobre e (*exterior* a Ω_2) , tenemos que para las siguientes integrales

$$\int\limits_{\partial\Omega_1\cap e} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n} - w\underline{b}u\cdot\underline{n}\right)dx + \int\limits_{\partial\Omega_2\cap e} \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n} - w\underline{b}u\cdot\underline{n}\right)dx \tag{8.20}$$

sólo se considerará el integrando de la expresión anterior de tal forma que identificamos la frontera interior e, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\underline{\underline{a}}\nabla u - \underline{b}u\right)\cdot\underline{n}w\right)_{\partial\Omega_1\cap e} + \left(\left(\underline{\underline{a}}\nabla u - \underline{b}u\right)\cdot\underline{n}w\right)_{\partial\Omega_2\cap e} \\
= \; & \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)_{\partial\Omega_2\cap e}\cdot\underline{n} - \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)_{\partial\Omega_1\cap e}\cdot\underline{n}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

usando la identidad algebraica siguiente (que es una forma de hacer el algebra de saltos equivalente al salto de la función bilineal $\underline{\mathfrak{D}}(u,w)$)

$$\eta\zeta - \xi\sigma = \frac{1}{2}(\eta+\xi)(\zeta-\sigma) + \frac{1}{2}(\eta-\xi)(\zeta+\sigma) \tag{8.22}$$

Entonces si identificamos los términos de la ecuación (8.22) con los de la ec. (8.21) se tiene que

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\underline{\underline{a}}\nabla u - \underline{b}u\right)_{\partial\Omega_2\cap e}\cdot\underline{n} \\ \zeta &= w\,|_{\Omega_2} \\ \xi &= \left(\underline{\underline{a}}\nabla u - \underline{b}u\right)_{\partial\Omega_1\cap e}\cdot\underline{n} \\ \sigma &= w\,|_{\Omega_1} \end{aligned} \tag{8.23}$$

entonces el integrando sobre $e = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ está dado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)_{\partial\Omega_2\cap e}\cdot\underline{n} - \left(w\underline{\underline{a}}\nabla u - w\underline{b}u\right)_{\partial\Omega_1\cap e}\cdot\underline{n} \\ = \;& \overset{\cdot}{\overline{\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}}}\,[[w]] + \left[\left[\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}\right]\right]\overset{\cdot}{\widehat{w}} - [[u]]\,\overset{\cdot}{\overline{\underline{b}w\cdot\underline{n}}}dx - \overset{\cdot}{\widehat{u}}\,[[\underline{b}w\cdot\underline{n}]]\,dx \end{aligned} \tag{8.24}$$

Nótese que para el término que contiene a $\underline{b}$ se intercambiaron las funciones u y w.

Aplicando estos resultados las integrales sobre la frontera interior de la ecuación (8.20) tenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{e\in\partial\Omega_i^{\Gamma}}\int_{\partial\Omega_1\cap e}\left(w\underline{a}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx + \sum_{e\in\partial\Omega_i^{\Gamma}}\int_{\partial\Omega_2\cap e}\left(w\underline{a}\nabla u - w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx \\ = \;& \sum_{e\in\partial\Omega_i^{\Gamma}}\int_{e}\overset{\cdot}{\overline{\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}}}\,[[w]] + \left[\left[\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}\right]\right]\overset{\cdot}{\widehat{w}} - [[u]]\,\overset{\cdot}{\overline{\underline{b}w\cdot\underline{n}}}dx - \overset{\cdot}{\widehat{u}}\,[[\underline{b}w\cdot\underline{n}]]\,dx \end{aligned} \tag{8.25}$$

Consecuentemente la ecuación (8.17) es

$$\sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i}\nabla w\cdot\underline{\underline{a}}\nabla u-\underline{b}u\nabla w+wcudx-\sum_{e\in\Omega_i^D}\int\limits_{e}\left(w\underline{\underline{a}}\nabla u-w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx$$

$$+\sum_{e\in\partial\Omega_i^\Gamma}\int\limits_{e}[[u]]\,\dot{\overline{\underline{b}w\cdot\underline{n}}}dx+\dot{\widehat{u}}\,[[\underline{b}w\cdot\underline{n}]]\,dx$$

$$-\sum_{e\in\partial\Omega_i^\Gamma}\int\limits_{e}\dot{\overline{\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}}}\,[[w]]+\left[\left[\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}\right]\right]\dot{\widehat{w}}dx$$

$$=\sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i}fwdx \tag{8.26}$$

La ecuación anterior puede ser escrita como

$$\int\limits_{\Omega}\nabla w\cdot\underline{\underline{a}}\cdot\nabla u-u\underline{b}\nabla w+ucwdx-\int\limits_{\Gamma}\dot{\overline{\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}}}\,[[w]]+\left[\left[\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}\right]\right]\dot{\widehat{w}}dx+$$

$$\int\limits_{\Gamma}[[u]]\,\dot{\overline{\underline{b}w\cdot\underline{n}}}dx+\dot{\widehat{u}}\,[[\underline{b}w\cdot\underline{n}]]\,dx-\int\limits_{\partial\Omega}\left(w\underline{\underline{a}}\nabla u-w\underline{b}u\right)\cdot\underline{n}dx$$

$$=\int\limits_{\Omega}fwdx \tag{8.27}$$

Con el supuesto de que en la frontera exterior solo existen condiciones Dirichlet. Un punto a considerar en la ecuación anterior es que si el flujo $\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}$ es continuo casi donde quiera en Ω, es decir, cuando $u\in H^2(\Omega)$,entonces se tiene que

$$\left[\left[\underline{\underline{a}}\nabla u\cdot\underline{n}\right]\right]\{w\}=0\ \ \forall w\in H^2(\Omega_i) \tag{8.28}$$

8.4. Análisis de los Métodos

Ahora estamos en condiciones de hacer una comparación término a término de las tres formulaciones. Escribimos primero el **FEM** estándar

$$\int_{\Omega} \left(\nabla w \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla u - \underline{b} u \nabla w + wcu\right) dx - \int_{\partial\Omega} w \left(\underline{\underline{a}} \nabla u - \underline{b} u\right) \cdot \underline{n} dx \tag{8.29}$$
$$= \int_{\Omega} fw dx$$

seguimos con la **Formulación Green-Herrera** considerando funciones discontinuas definidas por tramos

$$\int_{\Omega} \left(\nabla u \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla w - u \underline{b} \cdot \nabla w + cuw\right) dx - \int_{\partial\Omega} w \left(\underline{a}_n \cdot \nabla u - b_n u\right) dx$$
$$- \int_{\Gamma} [[b_n w]] \dot{\widehat{u}} + [[u]] \dot{\widehat{b_n w}} dx + \int_{\Gamma} \dot{\widehat{w}} [[\underline{a}_n \nabla u]] + [[w]] \dot{\overline{\underline{a}_n \nabla u}} dx$$
$$= \int_{\Omega} fw dx \tag{8.30}$$

y por último el **Método Galerkin Discontinuo**

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla u - \underline{b} u \nabla w + wcu dx - \int_{\partial\Omega} \left(w \underline{\underline{a}} \nabla u - w \underline{b} u\right) \cdot \underline{n} dx +$$
$$\int_{\Gamma} [[u]] \dot{\widehat{\underline{b} w \cdot \underline{n}}} dx + \dot{\widehat{u}} [[\underline{b} w \cdot \underline{n}]] dx - \int_{\Gamma} \underline{\underline{a}} \dot{\widehat{\nabla u \cdot \underline{n}}} [[w]] + \left[\left[\underline{\underline{a}} \nabla u \cdot \underline{n}\right]\right] \dot{\widehat{w}} dx$$
$$= \int_{\Omega} fw dx \tag{8.31}$$

Para hacer el análisis a los tres métodos consideraremos los integrandos con respecto a su dominio de integración.

1._ Primeramente la integral sobre el dominio Ω, se tiene que para los tres métodos es la misma, es decir es,

$$\int_{\Omega} \left(\nabla w \cdot \underline{\underline{a}} \nabla u - \underline{b} u \nabla w + w c u\right) dx$$

2._ Para la integral sobre la frontera exterior $\partial\Omega$ se tiene que para las tres formulaciones es la misma, es decir

$$\int_{\partial\Omega} w \left(\underline{a}_n \nabla u - b_n u\right) dx$$

3._ Integración sobre la frontera interior Γ. Esta corresponde sólo a la formulación Green-Herrera y GD

A._ Para el término que incluye al vector $\underline{b}$ las dos formulaciones tienen el mismo integrando, es decir,

$$\int_{\Gamma} \left([[b_n w]] \, \dot{\widehat{u}} + [[u]] \, \dot{\widehat{b_n w}} \right) dx$$

Solamente difieren en el signo, es decir,

B._ En cuanto al integrando que contiene a la matriz $\underline{\underline{a}}$, de igual manera el integrando es idéntico y está dado por

$$\int_{\Gamma} \dot{\widehat{\underline{\underline{a}} \nabla u \cdot \underline{n}}} \, [[w]] + \left[\left[\underline{\underline{a}} \nabla u \cdot \underline{n}\right]\right] \dot{\widehat{w}} dx$$

de igual forma solo difiere en el signo.

Por lo tanto el Método Galerkin discontinuo y la Formulación Green-Herrera plantean las misma forma variacional para el operador diferencial más general de segundo orden. Nótese que la única diferencia está dada en la integral de frontera interior, ello es débido a la manera como está orientada la normal unitaria exterior $\underline{n}$. Por lo tanto las dos formulaciones Green-Herrera y GD llevan a la misma forma variacional. La Formulación Green-Herrera plantea un método sistemático y metodológico por ello es inmediato plantear la formulación variacional.

Por otro lado si se considera que tanto $u,w \in H^2(\Omega)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} [[u]] &= [[w]] = 0 \\ \dot{\widehat{u}} &= u \\ \dot{\widehat{w}} &= w \\ [[\nabla u]] &= [[\nabla w]] = 0 \end{aligned} \tag{8.32}$$

es decir, tanto el salto de las funciones como el salto de la derivada son nulos, y al sustituir en los métodos GD y Green-Herrera se obtienela formulación de FEM estándar.

Para muchos problemas en mecánica de solidos y fluidos es de interés desarrollar un método para la aproximación de dos variables, velocidad del fluido y una variable escalar (ej. presión) simultaneamente. Un método que ayuda a resolver esta situación es el método Galerkin discontinuo mixto, a continuación se hace un planteamiento para el operador diferencial más general de segundo orden.

8.5. El Método Galerkin Discontinuo Mixto

Considérese el mismo operador para desarrollarlo con la formulación GD

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right) + \nabla \cdot \left(\underline{b}u\right) + cu = f \text{ en } \Omega \tag{8.33}$$

tal que $f \in L^2(\Omega)$. Para dar lugar al método DG, primero se escribe el problema como un sistema de primer orden, entonces se tiene

$$\sigma = \underline{\underline{a}} \cdot \nabla u \qquad \text{y} \quad -\nabla \cdot \sigma + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f, \text{en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \tag{8.34}$$

El siguiente paso es multiplicar las dos ecuaciones por funciones de prueba $\underline{\tau}$ y w respectivamente e integrando sobre cada subdominio de Ω_i de Ω, se tiene

$$\int\limits_{\Omega_i} \underline{\tau} \cdot \underline{\underline{a}} \nabla u dx = -\int\limits_{\Omega_i} u \nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}}\tau\right) dx + \int\limits_{\Omega_i} \nabla \cdot \left(\underline{\tau}\underline{\underline{a}}u\right) dx \tag{8.35}$$

sustituyendo se tiene

$$\int\limits_{\Omega_i} \sigma \cdot \underline{\tau} dx = -\int\limits_{\Omega_i} u \nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right) dx + \int\limits_{\Omega_i} \nabla \cdot \left(\underline{\tau}\underline{\underline{a}}u\right) dx \tag{8.36}$$

Ahora para la segunda ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_i} -w\nabla \cdot (\sigma) + w\nabla \cdot (\underline{b}u) + cuwdx &= \qquad (8.37) \\ \int\limits_{\Omega_i} -\nabla \cdot (w\sigma) + \sigma \cdot \nabla w + \nabla \cdot (w\underline{b}u) - \underline{b}u\nabla w + cuwdx &= \int\limits_{\Omega_i} fwdx \end{aligned}$$

De aquí se tiene que

$$\int\limits_{\Omega_i} (\sigma \cdot \nabla w - \underline{b}u\nabla w + cuw)\, dx = \int\limits_{\Omega_i} fwdx + \int\limits_{\Omega_i} \nabla \cdot (w\sigma)\, dx - \int\limits_{\Omega_i} \nabla \cdot (w\underline{b}u)\, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega_i} fwdx + \int\limits_{\partial\Omega_i} w\sigma \cdot \underline{n} dx - \int\limits_{\partial\Omega_i} w\underline{b}u \cdot \underline{n} dx \tag{8.38}$$

De las ecuaciones (8.36) y (8.38) se obtiene la formulación débil que es la que se usará para definir los métodos DG, las cuales son

$$\int\limits_{\Omega_i} \sigma \cdot \underline{\tau} dx = -\int\limits_{\Omega_i} u \nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right) dx + \int\limits_{\partial\Omega_i} \underline{\tau}\underline{\underline{a}}u \cdot \underline{n} dx$$

$$\int\limits_{\Omega_i} \left(\sigma \cdot \nabla w - \underline{b} u \nabla w + cuw\right) dx \tag{8.39}$$
$$= \int\limits_{\Omega_i} fwdx + \int\limits_{\partial\Omega_i} w\sigma \cdot \underline{n} dx - \int\limits_{\partial\Omega_i} w\underline{b}u \cdot \underline{n} dx$$

donde $\underline{n}$ es el vector normal unitario apuntando hacía afuera de $\partial\Omega_i$. Necesitamos introducir espacios de elementos finitos asociados con la partición $\Pi{=}\{\Omega_i\}_{i=1}^{E}$ de el dominio Ω. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} W_h &= \left\{ w \in L^2(\Omega) : w\,|_{\Omega_i} \in P^r(\Omega_i) \quad \forall \Omega_i \in \Pi \right\} \\ \Sigma_h &= \left\{ \tau \in \left[L^2(\Omega)\right]^2 : \tau\,|_{\Omega_i} \in \Sigma(\Omega_i) \quad \forall \Omega_i \in \Pi \right\} \end{aligned} \tag{8.40}$$

donde $P^r(\Omega_i)$ es el espacio de polinomios de grado mayor o igual a 1sobre Ω_i y $\Sigma(\Omega_i) = [P^r(\Omega_i)]^2$. Entonces se tiene que encontrar $u_h \in W_h$ y $\sigma_h \in \Sigma_h$, tal que para todo $\Omega_i \in \Pi$ se tiene que

$$\int\limits_{\Omega_i} \sigma_h \cdot \underline{\tau} dx = -\int\limits_{\Omega_i} u_h \nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right) dx + \int\limits_{\partial\Omega_i} \underline{\tau}\underline{\underline{a}}\widehat{u} \cdot \underline{n} dx \quad \forall \tau \in \Sigma(\Omega_i)$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_i} \left(\sigma_h \cdot \nabla w - \underline{b} u_h \nabla w + c u_h w\right) dx \quad &= \\ \int\limits_{\Omega_i} fwdx + \int\limits_{\partial\Omega_i} w\widehat{\sigma}_h \cdot \underline{n} dx - \int\limits_{\partial\Omega_i} w\underline{b}\widehat{u} \cdot \underline{n} dx \quad \forall w \quad &\in \quad P^r(\Omega_i) \end{aligned} \tag{8.41}$$

donde los *flujos numéricos* $\widehat{\sigma}_h$ y $\widehat{u}$ son las aproximaciones a $\sigma = \underline{\underline{a}}\nabla u$ y u, respectivamente sobre la frontera de Ω_i. Para completar la especificación del método DG se debe expresar los flujos numéricos $\widehat{\sigma}_h$ y $\widehat{u}$ en términos de σ_h y u_h y en términos de las condiciones de frontera. Es por ello que la formulación ec (8.41) es llamada *la formulación de flujo.*

Si en las ecuaciones de *formulación de flujo* se suma sobre todo los elementos de la partición se tiene

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \underline{\tau} dx = -\int_{\Omega} u_h \nabla_h \cdot \left(\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right) dx + \sum_{i=1}^{E} \int_{\partial\Omega_i} \underline{\tau}\,\underline{\underline{a}}\widehat{u} \cdot \underline{n} dx$$

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_h \cdot \nabla_h w - \underline{b} u_h \nabla_h w + c u_h w\right) dx \tag{8.42}$$

$$= \int_{\Omega} f w dx + \sum_{i=1}^{E} \int_{\partial\Omega_i} w \widehat{\sigma} \cdot \underline{n} dx - \sum_{i=1}^{E} \int_{\partial\Omega_i} w \underline{b} \widehat{u} \cdot \underline{n} dx$$

donde $\nabla_h w$ y $\nabla_h \cdot \left(\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right)$ son las funciones restringidas a cada subdominio $\Omega_i \in \Omega$ tal que son iguales a ∇w y $\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right)$ respectivamente. Considerando el término correspondiente a la suma como

$$\sum_{i=1}^{E} \int_{\Omega_i} \underline{\tau} u \cdot \underline{n} dx = \int_{\Gamma} [[u]] \cdot \{\underline{\tau}\} ds + \int_{\Gamma^0} [[\underline{\tau}]] \{u\} ds \tag{8.43}$$

donde $\Gamma = \cup_{i=1}^{E} \partial\Omega_i$ y $\Gamma^0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$. Después de una simple aplicación de esta identidad a las ecuaciones en (8.42) se tiene

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \underline{\tau} dx = -\int_{\Omega} u_h \nabla_h \cdot \left(\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right) dx + \int_{\Gamma} [[\widehat{u}]] \cdot \left\{\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right\} ds + \int_{\Gamma^0} \left[\left[\underline{\underline{a}}\underline{\tau}\right]\right] \{\widehat{u}\} ds \tag{8.44}$$

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_h \cdot \nabla_h w - \underline{b} u \nabla_h w + c u_h w\right) dx = \int_{\Omega} f w dx + \int_{\Gamma} [[w]] \cdot \{\widehat{\sigma}\} ds + \int_{\Gamma^0} [[\widehat{\sigma}]] \{w\} ds$$

$$- \int_{\Gamma} [[\widehat{u}]] \cdot \{\underline{b} w\} ds - \int_{\Gamma^0} [[\underline{b} w]] \{\widehat{u}\} ds \tag{8.45}$$

Reescribiendo la ecuación (8.45) se tiene

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_h \cdot \nabla_h w - \underline{b} u \nabla_h w + c u_h w\right) dx - \int_{\Gamma} [[w]] \cdot \{\widehat{\sigma}\} ds - \int_{\Gamma^0} [[\widehat{\sigma}]] \{w\} ds +$$

$$\int_{\Gamma} [[\widehat{u}]] \cdot \{\underline{b} w\} ds + \int_{\Gamma^0} [[\underline{b} w]] \{\widehat{u}\} ds$$

$$= \int_{\Omega} fwdx \tag{8.46}$$

Ahora, se expresa σ_h en términos de u_h. Para hacer esto, se usa otra identidad de integración por partes

$$-\int_{\Omega} \nabla_h \cdot \left(\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right) wdx = \int_{\Omega} \underline{\tau}\underline{\underline{a}} \cdot \nabla_h wdx - \int_{\Gamma} [[w]] \cdot \left\{\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right\} ds - \int_{\Gamma^0} \left[\left[\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right]\right] \{w\} ds \tag{8.47}$$

Para todo $\underline{\tau} \in \left[H^1(\Pi)\right]^2$ y $w \in H^1(\Pi)$. Ahora tomando $w = u_h$ en la identidad de arriba e insertandola dentro del lado derecho de la ecuación (8.44), se obtiene que para cada $\underline{\tau} \in \Sigma_h$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \underline{\tau} dx \quad &= \quad \int_{\Omega} \underline{\tau}\underline{\underline{a}} \cdot \nabla_h u_h dx - \int_{\Gamma} [[u_h]] \cdot \left\{\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right\} ds - \int_{\Gamma^0} \left[\left[\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right]\right] \{u_h\} ds + \\ &\int_{\Gamma} [[\widehat{u}]] \cdot \left\{\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right\} ds + \int_{\Gamma^0} \left[\left[\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right]\right] \{\widehat{u}\} ds\end{aligned}$$

entonces se tiene

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \underline{\tau} dx = \int_{\Omega} \underline{\tau}\underline{\underline{a}} \cdot \nabla_h u_h dx + \int_{\Gamma} [[\widehat{u} - u_h]] \cdot \left\{\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right\} ds + \int_{\Gamma^0} \left[\left[\underline{\tau}\underline{\underline{a}}\right]\right] \{\widehat{u} - u_h\} ds \tag{8.48}$$

Tomando $\underline{\tau} = \nabla_h w$ en la identidad (8.48) entonces al sustituir en la ecuación (8.46), esta se escribe como

$$B_h(u_h, w) = \int_{\Omega} fwdx \quad \forall w \in W_h$$

donde

$$\begin{aligned}B_h(u_h, w) \quad &= \quad \int_{\Omega} \left(\nabla_h w \underline{\underline{a}} \cdot \nabla_h u_h - \underline{b} u_h \nabla_h w + c u_h w\right) dx - \int_{\Gamma} [[w]] \cdot \{\widehat{\sigma}\} ds \\ &- \int_{\Gamma^0} [[\widehat{\sigma}]] \{w\} ds + \int_{\Gamma} [[w]] \cdot \{\underline{b}\widehat{u}\} ds + \int_{\Gamma^0} [[\underline{b}\widehat{u}]] \{w\} ds \\ &+ \int_{\Gamma} [[\widehat{u} - u_h]] \cdot \left\{\tau \underline{\underline{a}}\right\} ds + \int_{\Gamma^0} \left[\left[\tau \underline{\underline{a}}\right]\right] \{\widehat{u} - u_h\} ds\end{aligned}$$

agrupando términos se tiene que

$$
\begin{aligned}
B_h(u_h, w) &= && (8.49) \\
& \int_\Omega \left(\nabla_h w \underline{\underline{a}} \cdot \nabla_h u_h - \underline{b} u_h \nabla_h w + c u_h w\right) dx + \\
& \int_\Gamma [[\widehat{u} - u_h]] \cdot \left\{\nabla_h w \underline{\underline{a}}\right\} - [[w]] \cdot \{\widehat{\sigma}\} \, ds + \\
& \int_{\Gamma^0} \left[\left[\nabla_h w \underline{\underline{a}}\right]\right] \{\widehat{u} - u_h\} - [[\widehat{\sigma}]] \{w\} \, ds + \\
& \int_\Gamma [[\widehat{u}]] \cdot \{\underline{b} w\} \, ds + \int_{\Gamma^0} [[\underline{b} w]] \{\widehat{u}\} \, ds
\end{aligned}
$$

Para cualesquiera $u_h \in H^2(\Pi)$ y $w \in H^2(\Pi)$. La ecuación (8.49) es la *formulación primal* del método y la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ es la *forma primal*.

Un punto importante a considerar es que sobre la frontera exterior $\partial\Omega$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
[[w]] &\equiv w\underline{n} \\
\{\underline{\tau}\} &\equiv \underline{\tau}
\end{aligned}
\qquad (8.50)
$$

Para expresar las integrales de manera análoga con los términos de frontera externa e interna de la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ obtenida, entonces sólo es necesario separar la integral sobre Γ, es decir

$$
\begin{aligned}
B_h\left(u_h, w\right) \quad = & \\
& \int\limits_{\Omega} \left(\nabla_h w \underline{\underline{a}} \cdot \nabla_h u_h - \underline{b} u_h \nabla_h w + c u_h w\right) dx + \\
& \int\limits_{\partial\Omega} [[\widehat{u} - u_h]] \cdot \left\{\nabla_h w \underline{\underline{a}}\right\} - [[w]] \cdot \{\widehat{\sigma}\}\, ds + \\
& \int\limits_{\partial\Omega} [[\widehat{u}]] \cdot \{\underline{b} w\}\, ds + \\
& \int\limits_{\Gamma^0} [[\widehat{u} - u_h]] \cdot \left\{\nabla_h w \underline{\underline{a}}\right\} - [[w]] \cdot \{\widehat{\sigma}\}\, ds + \\
& \int\limits_{\Gamma^0} \left[\left[\nabla_h w \underline{\underline{a}}\right]\right] \{\widehat{u} - u_h\} - [[\widehat{\sigma}]]\, \{w\}\, ds + \\
& \int\limits_{\Gamma^0} [[\widehat{u}]] \cdot \{\underline{b} w\}\, ds + \int\limits_{\Gamma^0} [[\underline{b} w]]\, \{\widehat{u}\}\, ds
\end{aligned}
$$

La ecuación anterior puede ser escrita como

$$
\begin{aligned}
B_h\left(u_h, w\right) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (8.51)\\
& \int\limits_{\Omega} \left(\nabla_h w \underline{\underline{a}} \cdot \nabla_h u_h - \underline{b} u_h \nabla_h w + c u_h w\right) dx + \\
& \int\limits_{\partial\Omega} [[\widehat{u} - u]] \cdot \nabla_h w \underline{\underline{a}} - w \underline{n} \cdot \left\{\underline{\underline{a}} \nabla_h u_h\right\} ds + \\
& \int\limits_{\partial\Omega} [[\widehat{u}]] \cdot \{\underline{b} w\} \, ds + \\
& \int\limits_{\Gamma^0} [[\widehat{u} - u]] \cdot \left\{\nabla_h w \underline{\underline{a}}\right\} - [[w]] \cdot \left\{\underline{\underline{a}} \nabla u\right\} ds + \\
& \int\limits_{\Gamma^0} \left[\left[\nabla w \underline{\underline{a}}\right]\right] \{\widehat{u} - u_h\} - \left[\left[\underline{\underline{a}} \nabla u\right]\right] \{w\} \, ds + \\
& \int\limits_{\Gamma^0} [[\widehat{u}]] \cdot \{\underline{b} w\} + [[\underline{b} w]] \{\widehat{u}\} \, ds
\end{aligned}
$$

Donde Γ^0 corresponde a la frontera interna del dominio, es decir, es equivalente a Γ como se muestra en las Fórmulas Green-Herrera. Por lo tanto de ha desarrollado el Método Galerkin Discontinuo Mixto para el operador diferencial más general de segundo orden.

Capítulo 9

Interpretación como una extensión de Operadores

Consideremos una región Ω y definimos el espacio de funciones base y de peso, definidos en Ω para ser el espacio $D(\Omega)$. Además se supone que las pertenecientes a $D(\Omega)$ pueden tener discontinuidades a través de algunas fronteras internas cuya unión será denotada por Γ. Por ejemplo, en aplicaciones de la teoría de los métodos de elemento finito, el conjunto Γ es la unión de todas las fronteras interrelacionadas de los elementos. La definición de adjunto formal requiere que un operador diferencial $\mathcal{L}$ y su adjunto formal $\mathcal{L}^*$, satisface la condición que $w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w$ es una divergencia; es decir,

$$w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w = \nabla \cdot \underline{\mathfrak{D}}(u, w)$$

para una función bilineal vector-valuada $\underline{\mathfrak{D}}(u, w)$, la cual envuelve derivadas de orden $m-1$.

9.1. Operadores Extensión

La extensión algebráica $\widehat{\mathcal{L}}$ del operador distribucional $\mathcal{L}$ es definida para ser la funcional bilinear $P - J$. Más precisamente, $\widehat{\mathcal{L}}$ está definida por:

$$\int_{\Omega} w\widehat{\mathcal{L}}udx = \langle (P-J)\,u, w\rangle \tag{9.1}$$

el cual se satisface siempre que $u \in D$ y $w \in D$. Similarmente, el operador extensión correspondiente a $\mathcal{L}^*$ es definido para ser la funcional bilineal $Q^* - K^*$, es decir,

$$\int_{\Omega} u\widehat{\mathcal{L}}^* wdx = \langle (Q^* - K^*)\,u, w\rangle \tag{9.2}$$

se satisface cuando u como w pertenecen a D. Entonces, usando estos operadores de extensión; las fórmulas de Green-Herrera ecuación (6.19) puede ser escrita como:

$$\int_{\Omega} w\widehat{\mathcal{L}}udx - \int_{\Omega} u\widehat{\mathcal{L}}^* wdx = \langle (B - C^*)\,u, w\rangle \tag{9.3}$$

para elementos $u \in D$ y $w \in D$.

9.2. Comparación entre $\widehat{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}$

Desde las definiciones para $\int_{\Omega} w\mathcal{L}udx$ y $\int_{\Omega} u\mathcal{L}^* wdx$, las cuales son estándar en la teoría de las distribuciones, no puede ser aplicada a todos los posibles pares (u, w), tal que $u \in D$ y $w \in D$, las extensiones $\widehat{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}^*$ ya fueron introducidas en la sección (9.1), para las cuales $\int_{\Omega} w\widehat{\mathcal{L}}udx$ y $\int_{\Omega} w\widehat{\mathcal{L}}^* udx$ están bien definidas, siempre que $u \in D$ y $w \in D$. Esto muestra que los operadores $\widehat{\mathcal{L}}$ y $\widehat{\mathcal{L}}^*$, definidos por la ecuaciones (9.1) y (9.2) verdaderamente son extensiones de los operadores distribucionales $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^*$, respectivamente. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar brevemente este resultado. Para llevar a cabo este objetivo, únicamente es necesario probar que para cada $u \in D$ y $w \in D$, las siguientes implicaciones son válidas:

$$\int_{\Omega} w\mathcal{L}udx \text{ está bien definida } \Longrightarrow \int_{\Omega} w\mathcal{L}udx = \int_{\Omega} w\widehat{\mathcal{L}}udx \tag{9.4}$$

y

$$\int_{\Omega} u\mathcal{L}^* w dx \text{ está bien definida } \Longrightarrow \int_{\Omega} u\mathcal{L}^* w dx = \int_{\Omega} u\widehat{\mathcal{L}}^* w dx \qquad (9.5)$$

La demostración viene dada en el apéndice B.
Dado un operador $\mathcal{L}$ y su adjunto $\mathcal{L}^*$ está sobreentendido en un sentido distribucional, considerando que ellos son de orden m, ambos $\int_{\Omega} w\mathcal{L}udx$ y $\int_{\Omega} u\mathcal{L}^* wdx$.

9.3. Ejemplos de Aplicación de los Operadores Extensión de las Derivadas Distribucionales

Para ilustrar la aplicación de las fórmulas Green-Herrera como una extensión de las derivada distribucionales, a continuación se muestran algunos ejemplos para el caso unidimensional.

Como primera ilustración, consideremos los operadores $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$, en el caso cuando el operador distribucional $\mathcal{L} \equiv \frac{d}{dx}$, la región Ω es el intervalo $(-1, 1)$ de la recta real y la partición de Ω está hecha de 2 intervalos: $\Omega_1 = (-1, 0)$ y $\Omega_2 = (0, 1)$. Entonces el operador adjunto es $\mathcal{L}^* \equiv -\frac{d}{dx}$, mientras que $\underline{\mathfrak{D}}(u, w) = uw$. Consideremos una función u definida por: $u = 0$ para $-1 < x < 0$ y $u = 1$ para $0 \leq x < 1$. De este modo u es esencialmente, una función tipo Heaviside. La función de peso w será tomada con diferentes grados de suavidad.

A Cuando $w \in H^1(\Omega)$, así que w es continua

i En este caso, la aplicación de la fórmula de Green para operadores distribucionales da

$$\int_{-1}^{1} w\mathcal{L}udx = \int_{-1}^{1} u\mathcal{L}^{*}wdx + \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}(uw)\,dx \tag{9.6}$$
$$= \int_{-1}^{1} u\mathcal{L}^{*}wdx + uw|_{-1}^{1}$$

Haciendo la evaluaciones se obtiene que

$$\int_{-1}^{1} w\mathcal{L}udx = -\int_{0}^{1} \frac{dw}{dx}dx + w(1) \tag{9.7}$$
$$= -w|_{0}^{1} + w(1)$$
$$= w(0)$$

Este resultado es estandar. En esencia, esto establece que du/dx es una función Delta de Dirac cuando u es una función tipo Heaviside.

ii Usando el hecho que $\underline{\mathfrak{D}}(u,w) = uw$ y aplicando**,** se tiene que

$$\int_{-1}^{1} w\widehat{\mathcal{L}}udx = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} w\mathcal{L}udx + \left(\dot{\widehat{w}}\,[[u]]\right)|_{x=0} = w(0) \tag{9.8}$$

Esto es por que $[[u]]\,|_{x=0} = 1$, mientras que $\dot{\widehat{w}}(0) = w(0)$, por que w es continua. Por otro lado la suma de las integrales es cero por que $u = 0$, y $u = 1$, para los dominios Ω_1 y Ω_2 respectivamente.

B Aquí se considera el caso cuando w tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$, así que $w \in D$ pero $w \notin H^1(\Omega)$.

i Primero identificamos quien es

$$\int_{-1}^{1} w\mathcal{L}udx \tag{9.9}$$

Nótese que **NO** está definida.

ii Ahora vemos que sucede con

$$\int_{-1}^{1} w\widehat{\mathcal{L}}udx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} w\mathcal{L}udx + \left(\dot{\widehat{w}} \left[\left[u\right]\right] \right) |_{x=0} = \dot{\widehat{w}} \left(0\right) \tag{9.10}$$

este término está bien definido, así que

$$\int_{-1}^{1} w\widehat{\mathcal{L}}udx = \dot{\widehat{w}} \left(0\right) \tag{9.11}$$

esto es recordemos que

$$\dot{\widehat{w}} \left(0\right) = \frac{1}{2} \left(w\left(0_+\right) + w\left(0_-\right) \right) \tag{9.12}$$

Como segunda ilustración, consideremos $\mathcal{L} = d^2/dx^2$. Entonces $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ de la definición de operador adjunto, mientras que $\underline{\mathfrak{D}} \left(u, w\right) = w\frac{du}{dx} - u\frac{dw}{dx}$, y procedemos como arriba:

A Aquí se considerará que $w \in H^2\left(\Omega\right)$, así que w es continua, con derivada de primer orden continua.

i De nuevo, aplicación de las fórmulas de Green da

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} w\mathcal{L}udx &= \int_{-1}^{1} u\mathcal{L}^*wdx + \left(wu' - uw'\right)|_{-1}^{1} \\
&= \int_{-1}^{1} uw''dx + \left(wu' - uw'\right)|_{-1}^{1} \\
&= \int_{0}^{1} w''dx + \left(wu' - uw'\right)|_{-1}^{1} \\
&= \int_{0}^{1} w''dx - w'\left(1\right) \\
&= w'\left(1\right) - w'\left(0\right) - w'\left(1\right) \\
&= -w'\left(0\right)
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Este es un resultado estándar. En esencia, esto establece que u'' es la derivada distribucional de la función Delta de Dirac, cuando u es una función tipo Heaviside.

ii Ahora considerando que $\underline{\mathfrak{D}}(u, w) \equiv wu' - uw'$, aplicando la ecuación (9.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} w\widehat{\mathcal{L}}udx &= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} w\mathcal{L}udx + \left(\dot{\widehat{w}} [[u']] - \dot{\widehat{w'}} [[u]] \right) |_{x=0} \\ &= -w'(0) \end{aligned} \tag{9.14}$$

esto es por que$\dot{\widehat{w'}}(0) = w'(0)$, ya que w es continua. Nótese que

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} w\mathcal{L}udx = 0 \tag{9.15}$$

y además $[[u']] = 0$ y $[[u]] |_{x=0} = 1$.

B Considere el caso en el cual w' tiene una discontinuida de salto en $x = 0$, así que $w \in D$, pero $w \notin H^2(\Omega)$.

i La integral

$$\int_{-1}^{1} w\mathcal{L}udx \tag{9.16}$$

NO está definida.

ii La integral

$$\int_{-1}^{1} w\widehat{\mathcal{L}}udx \tag{9.17}$$

está bien definida, es decir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} w\widehat{\mathcal{L}}udx &= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} w\mathcal{L}udx + \left(\dot{\widehat{w}} [[u']] - \dot{\overline{w'}} [[u]] \right) |_{x=0} \\ &= -\dot{\overline{w'}}(0) \end{aligned}$$

y es equivalente a la ecuación (9.14), excepto por que $\dot{\overline{w'}}(0) \neq w'(0)$, entonces se tiene que

$$\int_{-1}^{1} w\widehat{\mathcal{L}}udx = -\dot{\widehat{w'}}(0) \tag{9.18}$$

Por lo tanto se ha mostrado la gran generalidad que tienen los operadores de extensión de la teoría desa rrollada por el Dr. Herrera para funciones completamente discontinuas

Capítulo 10

Fórmulas de Green-Herrera para Matrices y el Operador de Steklov-Poincaré

Para introducir las fórmulas Green-Herrera para matrices primeramente se dan las condiciones necesarias para llegar al planteamiento del problema en términos matriciales. Para ello se introducen una partición del dominio Ω a partir de sus "*nodos originales*".

10.1. Descomposición de Dominio

Sea Ω un conjunto finito y a cuyos miembros nos referiremos como *nodos originales*. Además, $\{\Omega_1, ..., \Omega_E\}$ es una cubierta de Ω, i.e. $\{\Omega_1, ..., \Omega_E\}$ es una familia de subconjuntos de Ω tal que

$$\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{E} \Omega_\alpha \tag{10.1}$$

Un *nodo derivado* es un par $\underline{p} \equiv (p, \alpha)$ tal que $p \in \Omega_\alpha$. Por lo tanto el "*conjunto total de nodos derivados*" $\overline{\Omega}$ es definido por

$$\overline{\Omega} \equiv \left\{ \underline{p} = (p, \alpha) \mid p \in \Omega_\alpha \right\} \tag{10.2}$$

cuando $p \in \Omega$, escribimos

$$Z(p) \equiv \left\{ \underline{p} = (p, \alpha) \mid (p, \alpha) \in \overline{\Omega} \right\} \tag{10.3}$$

entonces, definimos la multiplicidad total de p, $m(p)$, es definido por la cardinalidad de $Z(p)$.
Observemos que la familia de subconjuntos $\{Z(p) \mid p \in \Omega\}$ define una partición de $\overline{\Omega}$, que será denotada por $\mathcal{P}$, ya que

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup\limits_{p \in \Omega} Z(p) \\ Z(p) \cap Z(q) = \emptyset, \text{ cuando } p \neq q. \end{cases} \tag{10.4}$$

Entonces, los subconjuntos $\Omega_I \subset \overline{\Omega}$ y $\Omega_\Gamma \subset \overline{\Omega}$ son constituidos por los nodos originales cuya multiplicidad es uno y los por los nodos originales cuya multiplicidad es mayor a uno, respectivamente. Es decir

$$\Omega_I \equiv \left\{ p \in \overline{\Omega} \mid m(p) = 1 \right\} \text{ y } \Omega_\Gamma = \left\{ p \in \overline{\Omega} \mid m(p) > 1 \right\} \tag{10.5}$$

Definición 26 *Al conjunto Ω_I lo llamaremos nodos interiores; y al conjunto Ω_Γ lo llamaremos nodos de frontera.*

Claramente

$$\overline{\Omega} = \Omega_\Gamma \cup \Omega_I \qquad \text{y} \qquad \Omega_I \cap \Omega_\Gamma = \emptyset \tag{10.6}$$

Correspondientemente, definimos

$$\Gamma = \bigcup_{p \in \Omega_\Gamma} Z(p) \qquad \text{y} \qquad I = \bigcup_{p \in \Omega_I} Z(p) \tag{10.7}$$

los cuales también satisfacen

$$\overline{\Omega} = I \cup \Gamma \qquad \text{y} \qquad I \cap \Gamma = \emptyset \tag{10.8}$$

Notemos que cada función real-valuada definida tanto en Ω como en $\bar{\Omega}$ es un vector (y, ellos serán referidos indistintamente como funciones o vectores).

Los espacios lineales $\tilde{D}(\Omega)$ y $\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ están constituidos por funciones (vectores) definidos en Ω y $\bar{\Omega}$ respectivamente. El *producto interior Euclideano* es definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\hat{u}} \cdot \underline{\hat{w}} \equiv \sum\limits_{p\in\Omega} \underline{\hat{u}}(p)\, \underline{\hat{w}}(p)\,,\ \forall \underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}} \in \tilde{D}(\Omega) \\ \underline{u} \cdot \underline{w} \equiv \sum\limits_{\underline{p}\in\bar{\Omega}} \underline{u}\left(\underline{p}\right) \underline{w}\left(\underline{p}\right) = \sum\limits_{q\in\Omega} \sum\limits_{\underline{p}\in Z(q)} \underline{u}(p)\, \underline{w}(p)\,,\ \forall \underline{u}, \underline{w} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \end{array} \right. \tag{10.9}$$

Similarmente, $\tilde{D}(Z(p)) \subset \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right), \tilde{D}(I) \subset \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ y $\tilde{D}(\Gamma) \subset \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ son espacios lineales cuyos elementos son funciones real valuadas definidas en $Z(p)\,, I$ y Γ. Aquí, p es cualquier grado original de libertad. Más propiamente, $\tilde{D}(Z(p))\,, \tilde{D}(I)$ y $\tilde{D}(\Gamma)$ son subespacios lineales de $\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ cuyos vectores son identicamente nulos fuera de $Z(p)\,,\ I$ y Γ respectivamente. Entonces

$$\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) = \tilde{D}(I) \oplus \tilde{D}(\Gamma) \tag{10.10}$$

donde $\oplus$ es la suma directa de dos espacios lineales. Esta última ecuación (10.10) se satisface si y sólo si

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) = \tilde{D}(I) + \tilde{D}(\Gamma) \\ \{0\} = \tilde{D}(I) \cap \tilde{D}(\Gamma) \end{array} \right. \tag{10.11}$$

por lo tanto los vectores de $\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ pueden representarse de una única manera como

$$\underline{u} = (u_I, u_\Gamma) = u_I + u_\Gamma \qquad \text{con } u_I \in \tilde{D}(I) \text{ y } u_{\Gamma} \in \tilde{D}(\Gamma)\,. \tag{10.12}$$

Definición 27 *Un vector $\underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ es llamado continuo cuando para todo $Z(p)$ de la partición $\mathcal{P}$ se tiene que*

$$\underline{u}\left(\underline{p}\right) = \underline{u}\left(\underline{q}\right) \qquad \forall \underline{p}, \underline{q} \in Z(p) \tag{10.13}$$

i.e. que en cada nodo $Z(p) \in \mathcal{P}$ el valor de tal vector es único.

Los vectores continuos constituyen un subespacio lineal de $\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ el cual denotaremos por $\bar{D}\left(\bar{\Omega}\right)$, notemos que

$$\tilde{D}(I) \subset \bar{D}\left(\bar{\Omega}\right) \tag{10.14}$$

Definición 28 *Sean* $\underline{\underline{a}} : \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \rightarrow \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ *y* $\underline{\underline{j}} : \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \rightarrow \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ *dos matrices definidas por*

$$\underline{\underline{a}}\underline{u} = Proy_{\bar{D}}\underline{u} \qquad y \qquad \underline{\underline{j}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{a}} \tag{10.15}$$

aquí, $\underline{\underline{I}}$ *es la matriz identidad y la proyección sobre* $\bar{D}$ *es tomada con respecto al producto interior Euclideano.*

Notemos que $\underline{\underline{j}}\underline{u}$ y $\underline{\underline{a}}\underline{u}$ son ortogonales, ya que $\underline{\underline{j}}\underline{u} = \underline{u} - \underline{\underline{a}}\underline{u}$ i.e. el vector $\underline{u}$ menos su proyección, es decir, $\underline{\underline{a}}\underline{u}$, $\underline{u}-$ $\underline{\underline{a}}\underline{u}$ es ortogonal a $\underline{\underline{a}}\underline{u}$. En vista de esta definición tenemos

$$\bar{D}\left(\bar{\Omega}\right) \equiv \underline{\underline{a}}\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \tag{10.16}$$

la ecuación (10.15) implica que

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{j}} \tag{10.17}$$

además, $\underline{\underline{j}}$ es también una proyección, verdaderamente, esta es la proyección sobre el complemento ortogonal de $\bar{D}$. Por lo tanto, $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{j}}$ son ambas simétricas, no negativas e idempotentes. También notemos que

$$\underline{\underline{a}}\underline{\underline{j}} = \underline{\underline{j}}\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{0}} \tag{10.18}$$

ya que $\underline{w}\underline{\underline{a}}\underline{\underline{j}}\underline{u} = \left(\underline{w}\underline{\underline{a}}\right) \cdot \left(\underline{\underline{j}}\underline{u}\right) = 0$ pues $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{j}}$ son ortogonales, en particular

$$\underline{\underline{j}}\bar{D}\left(\bar{\Omega}\right) = \{0\} \tag{10.19}$$

La construcción de la matriz $\underline{\underline{a}}$ es relativamente simple: "*dado un vector* $\underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$, *en cada uno de los grados de libertad pertenecientes a un nodo el valor de* $\underline{\underline{a}}\underline{u}$ *igual al promedio de* $\underline{u}$ *sobre este nodo*", i.e,

$$\underline{\underline{a}}\underline{u}\left(\underline{p}\right) = \frac{1}{\hat{m}\left(p\right)} \sum_{\underline{q} \in Z(p)} \underline{u}\left(\underline{q}\right), \text{ siempre que } \underline{p} \in Z\left(p\right) \tag{10.20}$$

recordemos que, $\hat{m}\left(p\right)$ es la cardinalidad de $Z\left(p\right)$. En el caso de $\underline{\underline{j}}$, no es necesario calcularla, ya que

$$\underline{\underline{j}}\,\underline{u} = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{a}}\right)\underline{u} = \underline{u} - \underline{\underline{a}}\,\underline{u}, \qquad \forall \underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right). \tag{10.21}$$

Por ejemplo, la estructra de $\underline{\underline{a}}^{(q)}$ y $\underline{\underline{j}}^{(q)}$, donde $q \in \mathbb{R}^2$ es un nodo de multiplicidad 2 queda como

$$\underline{\underline{a}}^{(q)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad y \qquad \underline{\underline{j}}^{(q)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{10.22}$$

y la estructura de $\underline{\underline{a}}^{(q)}$ y $\underline{\underline{j}}^{(q)}$, donde $q \in \mathbb{R}^2$ es un nodo de multiplicidad 4 queda como

$$\underline{\underline{a}}^{(q)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad y \qquad \underline{\underline{j}}^{(q)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}. \tag{10.23}$$

Por otro lado

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{u} = \underline{u} \qquad \text{y} \qquad \underline{\underline{j}}\,\underline{u} = 0, \qquad \forall \underline{u} \in \tilde{D}\left(I\right) \tag{10.24}$$

esto puede también ser visto que, para cada uno de los *nodos* $Z\left(p\right) \in \mathcal{P}$ cuando $\underline{u} \in \tilde{D}\left(Z\left(p\right)\right)$ implica que

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{u} \in \tilde{D}\left(Z\left(p\right)\right) \text{ y } \underline{\underline{j}}\,\underline{u} \in \tilde{D}\left(Z\left(p\right)\right), \tag{10.25}$$

entonces, es claro que las imágenes de ambos $\tilde{D}\left(I\right)$ y $\tilde{D}\left(\Gamma\right)$ bajo $\underline{\underline{a}}$ están contenidas en $\tilde{D}\left(I\right)$ y $\tilde{D}\left(\Gamma\right)$, respectivamente. Además, esto puede ser visto como

$$\begin{cases} \underline{\underline{a}}\tilde{D}\left(I\right) \subset \tilde{D}\left(I\right) \text{ y } \underline{\underline{j}}\tilde{D}\left(I\right) = \{0\} \\ \underline{\underline{a}}\tilde{D}\left(\Gamma\right) \subset \tilde{D}\left(\Gamma\right) \text{ y } \underline{\underline{j}}\tilde{D}\left(\Gamma\right) \subset \tilde{D}\left(\Gamma\right) \end{cases} \tag{10.26}$$

y

$$\underline{\underline{j}}\tilde{D}(\bar{\Omega}) = \underline{\underline{j}}\tilde{D}(\Gamma) \subset \tilde{D}(\Gamma). \tag{10.27}$$

Definición 29 *Definimos los espacios*

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1(\Gamma) &\equiv \underline{\underline{j}}\tilde{D}(\Gamma) = \underline{\underline{j}}\tilde{D}(\bar{\Omega}) \subset \tilde{D}(\Gamma) \\ \tilde{D}_2(\Gamma) &\equiv \underline{\underline{a}}\tilde{D}(\Gamma) \end{aligned} \tag{10.28}$$

Usando estas definiciones, tenemos las siguientes propiedades:

- $\tilde{D}_1(\Gamma)$ es el complemento ortogonal de $\bar{D}\left(\bar{\Omega}\right) = \underline{\underline{a}}\tilde{D}(\bar{\Omega})$
- $$\tilde{D}(\bar{\Omega}) = \tilde{D}_1(\Delta) \oplus \bar{D}(\bar{\Omega})$$
- $$\tilde{D}(\Gamma) = \tilde{D}_1(\Delta) \oplus \tilde{D}_2(\Delta)$$
- $\tilde{D}_1(\Gamma)$ y $\tilde{D}_2(\Gamma)$ son complementos ortogonales relativos a $\tilde{D}(\Gamma)$
- $$\bar{D}(\bar{\Omega}) = \tilde{D}_2(\Gamma) \oplus \tilde{D}(I)$$
- $$\begin{aligned} \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) &= \underline{\underline{a}}\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \oplus \underline{\underline{j}}\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) = \bar{D}\left(\bar{\Omega}\right) \oplus \underline{\underline{j}}\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \\ &= \tilde{D}\left(I\right) \oplus \tilde{D}_1\left(\Gamma\right) \oplus \tilde{D}_2\left(\Gamma\right) \end{aligned} \tag{10.29}$$

Otras propiedades implicadas por los resultados anteriores son:

$$\begin{aligned} \bar{D}\left(\bar{\Omega}\right) &= \left\{\underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \mid \underline{\underline{j}}\underline{u} = 0\right\} = \left\{\underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \mid \underline{\underline{a}}\underline{u} = \underline{u}\right\} \\ \tilde{D}_1\left(\Gamma\right) &= \left\{\underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \mid \underline{\underline{a}}\underline{u} = 0\right\} = \left\{\underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \mid \underline{\underline{j}}\underline{u} = \underline{u}\right\} \\ \tilde{D}_2\left(\Gamma\right) &= \left\{\underline{u} \in \tilde{D}\left(\Delta\right) \mid \underline{\underline{j}}\underline{u} = 0\right\} = \left\{\underline{u} \in \tilde{D}\left(\Delta\right) \mid \underline{\underline{a}}\underline{u} = \underline{u}\right\} \end{aligned} \tag{10.30}$$

todas estas relaciones serán usadas en lo que sigue.

Otra notación, la cual también será usada, es que para cada una de las funciones $\underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$, escribiremos

$$\dot{\widehat{\underline{u}}} \equiv \underline{\underline{a}}\underline{u} \qquad y \qquad [[\underline{u}]] \equiv \underline{\underline{j}}\underline{u} \tag{10.31}$$

Entonces $\dot{\widehat{\underline{u}}} \in \bar{D}\left(\bar{\Omega}\right)$, mientras $[[\underline{u}]]$ pertenecen a $\tilde{D}_1\left(\Gamma\right) \subset \tilde{D}\left(\Gamma\right)$. Nótese que, en vista de la Ec.(10.29) cualquier $\underline{u} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ puede ser escrita de forma única como

$$\underline{u} = \underline{u}_I + \underline{u}_\Gamma = \underline{u}_I + \underline{u}_{\Gamma 1} + \underline{u}_{\Gamma 2} \tag{10.32}$$

donde $\underline{u}_I \in \tilde{D}(I)$, $\underline{u}_{\Gamma 1} \in \tilde{D}_1(\Gamma)$ y $\underline{u}_{\Gamma 2} \in \tilde{D}_2(\Gamma)$ con

$$\underline{u}_{\Gamma 1} \equiv [[\underline{u}_\Gamma]], \underline{u}_{\Gamma 2} \equiv \dot{\widehat{\underline{u}_\Gamma}} \quad \text{y} \quad \underline{u}_\Gamma = \underline{u}_{\Gamma 1} + \underline{u}_{\Gamma 2}. \tag{10.33}$$

10.2. Formulación Matricial

Definimos la matriz

$$\underline{\underline{A}} : \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \rightarrow \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \tag{10.34}$$

tal que $\underline{\underline{A}}$, es una matriz simétrica y definida positiva. Y definimos el "producto interno de energía" como

$$(\underline{u}, \underline{w}) \equiv \underline{u} \cdot \underline{\underline{A}}\ \underline{w}, \ \forall \underline{u}, \underline{w} \in \tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right) \tag{10.35}$$

El espacio lineal $\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ es un espacio de Hilbert (dimensionalmente finito) cuando es provisto con el producto interno de energía. La Matriz $\underline{\underline{A}}$ se puede escribir como

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{II} & \underline{\underline{A}}_{I\Gamma} \\ \underline{\underline{A}}_{\Gamma I} & \underline{\underline{A}}_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \tag{10.36}$$

La notación aquí es tal que

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}_{II} : \tilde{D}(I) \rightarrow \tilde{D}(I), & \underline{\underline{A}}_{I\Gamma} : \tilde{D}(\Gamma) \rightarrow \tilde{D}(I) \\ \underline{\underline{A}}_{\Gamma I} : \tilde{D}(I) \rightarrow \tilde{D}(\Gamma), & \underline{\underline{A}}_{\Gamma\Gamma} : \tilde{D}(\Gamma) \rightarrow \tilde{D}(\Gamma) \end{cases} \tag{10.37}$$

tal que los espacios donde están definidas las submatrices son espacios lineales definidos en I y Γ.

Se introducen las siguientes definiciones

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{II} & \underline{\underline{A}}_{I\Gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y } \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underline{\underline{A}}_{\Gamma I} & \underline{\underline{A}}_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \tag{10.38}$$

es decir,

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{R}} \tag{10.39}$$

Definición 30 *Las Matrices* $\left[\left[\underline{\underline{R}}\right]\right]:\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)\rightarrow\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ *y* $\dot{\widehat{\underline{\underline{R}}}}:\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)\rightarrow\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ *son definidos por*

$$\left[\left[\underline{\underline{R}}\right]\right]\equiv-\underline{\underline{a}}\ \underline{\underline{R}}\quad y\quad \dot{\widehat{\underline{\underline{R}}}}\equiv-\ \underline{\underline{j}}\ \underline{\underline{R}} \tag{10.40}$$

Además, notemos las siguientes identidades

$$\underline{\underline{R}}=\underline{\underline{a}}\ \underline{\underline{R}}+\underline{\underline{j}}\ \underline{\underline{R}} \tag{10.41}$$

y entonces se tiene que

$$\underline{\underline{L}}+\underline{\underline{a}}\ \underline{\underline{R}}+\underline{\underline{j}}\ \underline{\underline{R}}=\underline{\underline{L}}^{T}+\underline{\underline{R}}^{T}\ \underline{\underline{a}}+\underline{\underline{R}}^{T}\underline{\underline{j}} \tag{10.42}$$

Notemos que los rangos de $\underline{\underline{L}}$ y de $\underline{\underline{R}}$ son $\tilde{D}\left(I\right)$ y $\tilde{D}\left(\Gamma\right)$, respectivamente, mientras que los de $\underline{\underline{aR}}$ y $\underline{\underline{jR}}$ están contenidas en $\tilde{D}_{2}\left(\Gamma\right)$ y $\tilde{D}_{1}\left(\Delta\right)$, respectivamente; ellos son linealmente independientes. La identidad

$$\underline{\underline{L}}+\underline{\underline{a}}\ \underline{\underline{R}}-\underline{\underline{R}}^{T}\ \underline{\underline{j}}=\underline{\underline{L}}^{T}+\underline{\underline{R}}^{T}\ \underline{\underline{a}}-\underline{\underline{j}}\ \underline{\underline{R}} \tag{10.43}$$

la cual es obtenida por reorganizar los términos de la ecuacion (10.42), las cuales serán referidas como "Fórmulas Green Herrera para matrices". Esto es equivalente a la siguiente ecuación

$$\underline{w}\cdot\underline{\underline{L}}\ \underline{u}+\dot{\widehat{\underline{w}}}\cdot\underline{\underline{a}}\ \underline{\underline{R}}\ \underline{u}-[[\underline{u}]]\,\underline{\underline{j}}\ \underline{\underline{R}}\ \underline{w}=\underline{u}\cdot\underline{\underline{L}}\ \underline{w}+\dot{\widehat{\underline{u}}}\cdot\underline{\underline{a}}\ \underline{\underline{R}}\ \underline{w}-[[\underline{w}]]\ \underline{\underline{j}}\ \underline{\underline{R}}\underline{u} \tag{10.44}$$

$\forall\ \underline{u}\in\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$,y $\forall\ \underline{w}\in\tilde{D}\left(\bar{\Omega}\right)$.
Nótese que la ecuación anterior es derivada de

$$\underline{w}\cdot\underline{\underline{L}}\ \underline{u}+\underline{w}\cdot\ \underline{\underline{R}}\ \underline{u}=\underline{u}\cdot\underline{\underline{L}}\ \underline{w}+\underline{u}\ \underline{\underline{R}}\ \underline{w} \tag{10.45}$$

Considerando la ecuación (10.40) , entonces las ecuación (10.45) puede ser escrita como

$$\underline{w}\cdot\underline{\underline{L}}\ \underline{u}-\dot{\widehat{\underline{w}}}\cdot\left[\left[\underline{\underline{R}}\right]\right]\ \underline{u}+[[\underline{u}]]\ \dot{\widehat{\underline{\underline{R}}}}\,\underline{w}=\underline{u}\cdot\underline{\underline{L}}\ \underline{w}-\dot{\widehat{\underline{u}}}\cdot\left[\left[\underline{\underline{R}}\right]\right]\ \underline{w}+[[\underline{w}]]\ \dot{\widehat{\underline{\underline{R}}}}\underline{u} \tag{10.46}$$

Ahora, las fórmulas Green-Herrera fueron introducidas originalmente para ecuaciones diferenciales parciales y pueden ser aplicadas a cualquier operador que es lineal, entonces se tiene interés en comparar la ecuación (10.10) con dicha formulación. Por ejemplo para el operador Laplaciano, las fórmulas Green-Herrera son

$$\int_{\Omega} w\mathcal{L}udx + \int_{\Gamma} \left\{ [[u]] \dot{\widehat{\frac{\partial w}{\partial n}}} - \dot{\widehat{w}} \left[\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]\right] \right\} dx$$

$$= \int_{\Omega} u\mathcal{L}wdx + \int_{\Gamma} \left\{ [[w]] \dot{\widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}} - \dot{\widehat{u}} \left[\left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]\right] \right\} dx \tag{10.47}$$

Entonces establecemos las siguientes correspondencias

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\leftrightarrow \underline{\underline{L}} \\ [[u]] &\leftrightarrow [[\underline{u}]] \\ \left[\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]\right] &\leftrightarrow [[\underline{\underline{R}}]]\ \underline{u} \\ \dot{\widehat{\frac{\partial u}{\partial n}}} &\leftrightarrow \dot{\widehat{\underline{\underline{R}}}}\,\underline{u} \\ \dot{\widehat{u}} &\leftrightarrow \dot{\widehat{\underline{u}}} \end{aligned} \tag{10.48}$$

Otro ejemplo es la fórmula Green-Herrera para el operador elíptico, simétrico y de segundo orden, el cual es

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot \left(\underline{\underline{a}} \cdot \nabla u\right) + cu \tag{10.49}$$

entonces la fórmula Green-Herrera está dada por

$$\int_{\Omega} w\mathcal{L}udx + \int_{\Gamma} \left\{ [[u]] \dot{\widehat{\underline{a}_n \nabla w}} - \dot{\widehat{w}} [[\underline{a}_n \nabla u]] \right\} dx =$$

$$\int_{\Omega} u\mathcal{L}^* wdx + \int_{\Gamma} \left\{ [[w]] \dot{\widehat{\underline{a}_n \nabla u}} - \dot{\widehat{u}} [[\underline{a}_n \nabla w]] \right\} dx \tag{10.50}$$

tal que el operador funcional bilineal está dado por

$$\underline{\mathfrak{D}}\,(u,w) = \underline{\underline{a}} \cdot (u\nabla w - w\nabla u) \tag{10.51}$$

la correspondencia con la ecuación (10.48) se satisface, excepto que

$$\begin{cases} [[\underline{a}_n \nabla u]] \leftrightarrow \left[\left[\underline{\underline{R}}\right]\right] \; \underline{u} \\ \widehat{\underline{a}_n \dot{\nabla} w} \leftrightarrow \widehat{\dot{\underline{\underline{R}}}}\, \underline{u} \end{cases} \tag{10.52}$$

Correspondencias similares a las de las ecuaciones (10.47) y (10.48) se pueden establecer de manera general para diferentes sistemas.
Si pensamos que el operador Steklov- Poincaré corresponde al salto de la derivada normal, la ecuación (10.48) nos lleva a la definición del *Operador Steklov-Poincaré* como

$$\underline{\underline{aR}} \tag{10.53}$$

Conclusiones

Desarrollar una teoría que unifica las formulaciones tanto a nivel de ecuaciones diferenciales parciales EDP´S como las formulaciones matriciales para la solución de dichas ecuaciones por métodos numéricos.

En este trabajo se desarrolla algebraicamente la teoría de operadores adjuntos para diferentes operadores diferenciales ya que con ello la teoria algebraica desarrollada por Herrera se vuelve sistemática y general cuando se trata con las derivadas distribucionales.

Las fórmulas Green-Herrera es una teoría generalizada como una extensión de las derivadas distribucionales, las cuales consideran funciones de base y de peso completamente discontinuas en la formulación. Situación que no es considerada en la teoría estándar de distribuciones.

Las Formulaciones Green-Herrera y Galerkin Discontinuo plantean la misma forma variacional en particular para el operador diferencial más general de segundo orden.

Con los ejemplos unidimensionales desarrollados en el capítulo 9 se muestra a las fórmulas Green-Herrera como una extensión de la derivadas distribucionales.

Bibliografía

[1] Celia, M. A., Russell.T.F., Herrera, I. y Ewing, R. E. *An Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method for the Advection-Diffusion Equation.* Advances in Water Resources , 13(4), pp 187-206, 1990.

[2] Rubio, E. *Métodos de Elementos Finitos con Funciones óptimas, FEM-OF*, Tesis de Doctorado. 2007. Posgrado en Ciencias de la Tierra, Instituto de geofísica, UNAM.

[3] Myron B. Allen III, Ismael Herrera & George F. Pinder *Numerical Modeling in science And Engineering;* John Wiley & Sons, Inc . 1988

[4] Herrera, I., Ewing, R.E., Celia M.A. y Russell,T. "*Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint Method: The Theoretical Framework".* Numerical Methods for partial Differential Equations 9(4), pp. 431-457, 1993

[5] Herrera, I. *Modelación Matemática de sistemas terrestres* (Notas de curso en preparación) Instituto de Geofísica, (UNAM).

[6] J. L. Lions and Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and applications,* Volumen , Springer-Verlag, New York, 1972.

[7] B. Daya Reddy, *Introductory Functional Analysis,* Springer-Verlag, New York, Inc 1998.

[8] Quarteroni, Sacco & Saleri ; *Numerical mathematics* ; Springer Verlag, New York c 2000.

[9] Richard E. Ewing, Hong Wang *A summary of Numerical Methods for time-dependent Advection-Dominated Partial Differential Equations.* Journal of Computational and Applied Mathematics 128, pp 423-445, Elsevier Science Publisher B.V. (North-Holland). 2001.

[10] Carrillo Ledesma Antonio *Aplicación del Cómputo en Paralelo a la Modelación de Sistemas Terrestres.* Tesis de Maestría del ¨Posgrado en Ciencias de la Tierra del Instituto de Geofísica de la UNAM, 2006.

[11] M. Díaz, *Desarrollo del Método de Colocación Trefftz-Herrera: Aplicación a Problemas de Transporte en las Geociencias*, Tesis de Doctorado, Instituto de Geofísica, UNAM,

2001.

[12] I. Herrera, *Theory of Differential Equations in Discontinuous Piecewise-Defined-Functions*, NUMER METH PART D E, 2007, 23:597-639.

[13] Herrera, I. "*On Operator Extensions: The Algebraic Theory Approach*". Advances in Optimization and Numerical Analysis, (Procs. of VI Workshop on Optimization and Analysis. Oaxaca, Oax. México, Enero, 1992), Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, pp. 155-163, 1992.

[14] I. Herrera, R. Yates and A. Carrillo, *General Matrix Expressions for Dual-Primal Methods.* To be published in NUM METH for PDE, 2009.

[15] P. G. Ciarlet, The finite element methods for elliptic problems, Classics in applied mathematics, 40, SIAM, Philadelphia, 2002.

[16] Herrera, I. and Yates, R., Ünified Multipliers-Free Theory of Dual-Primal Domain Descomposition Methods", Numerical Methods For Partial Differenctial Equations, Wiley InterScience, 2008.

Apéndice A

A continuación se dan definiciones, teoremas que fueron utilizados dentro del presente trabajo.

El soporte de una función u una función definida sobre un dominio Ω es la cerradura $\overline{K}$ de el conjunto de puntos $K \subset \Omega$ sobre los cuales $u(x) \neq 0$; usamos la notación $\overline{K}$ =supp$u(x)$. Decimos que u tiene soporte compacto sobre Ω si su soporte $\overline{K}$ es compacto.

Definición 31 *Un función $f(\cdot)$ es llamada localmente integrable, si para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ se tiene*

$$\int_K |f(x)| \, dx < \infty. \tag{A.1}$$

Definición 32 *Sea f y g funciones definidas en un dominio Ω entonces la operación definida por producto interior está dada por*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) \, g(x) \, dx \tag{A.2}$$

Definición 33 *El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ será el subconjunto de funciones infinitamente diferenciales con soporte compacto, algunas veces se denota también como $C_0^\infty(\Omega)$.*

Definición 34 *función lineal*

Sea f una función definida en un espacio X, decimos que f es una función lineal si satisface las siguientes condiciones

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \tag{A.3}$$

Definición 35 *Función Bilineal:*

Sea A una función definida en $X \times Y$, entonces decimos que $A(X,Y)$, es una función bilineal si es lineal en X y lineal en Y.

Demostración del del Teorema de Green Generalizado

Teorema 36 ***Green generalizado.*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ una región de $\mathbb{R}^n$ y sea $\Pi = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_E\}$ una descomposición de Ω; es decir, Ω_i $\forall i = 1, 2, ..., E$ es una subregión Ω, $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$ siempre que $i \neq j$, y $\cup_{i=1}^{E} \Omega_i \supset \Omega$. Además, en lo que sigue, Γ denota el complemento cerrado de $\partial\Omega$, en $\bigcup\limits_{i=1}^{E} \partial\Omega_i$. Entonces el teorema de Green generalizado establece que*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n} d\underline{x} - \int\limits_{\Gamma} [[\underline{u}]] \cdot \underline{n}_{\Gamma} d\underline{x} \tag{A.4}$$

tal que $\underline{u}(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una función vectorial de n variables continua por partes y con primera derivada continua por partes. Veáse figura (5.1)

Demostración. Para demostrar el Teorema de Green generalizado, consideremos un dominio de solo dos elementos, veáse la figura (10.1)

entonces

$$\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega \tag{A.5}$$

donde

$$\partial_1\Omega = \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \qquad \text{y} \qquad \partial_2\Omega = \partial\Omega \cap \partial\Omega_2 \tag{A.6}$$

además

$$\partial\Omega_1 = \partial_1\Omega \cup \Gamma \qquad \text{y} \qquad \partial\Omega_2 = \partial_2\Omega \cup \Gamma \tag{A.7}$$

Con esta notación, se tiene que

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} = \int\limits_{\Omega_1} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} + \int\limits_{\Omega_2} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} \tag{A.8}$$

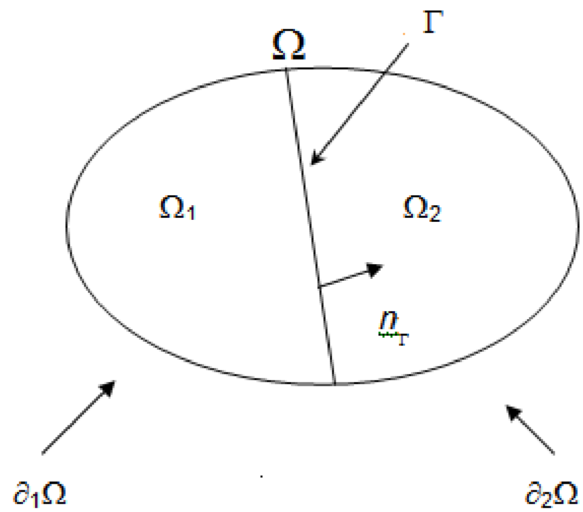

Figura 10.1: Partición del domino Ω y su frontera interna Γ.

Integrando para Ω_1 se tiene

$$\int_{\Omega_1} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} = \int_{\partial\Omega_1} \underline{u} \cdot \underline{n} d\underline{x} = \int_{\partial_1\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n}_\partial d\underline{x} + \int_{\Gamma} \underline{u}_- \cdot \underline{n}_\Gamma d\underline{x} \tag{A.9}$$

Observe que en la Ec.(A.9) , la normal unitaria en Γ se ha tomado apuntando hacia fuera de Ω_1. En forma similar se tiene que la integral sobre la región Ω_2 es

$$\int_{\Omega_2} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} = \int_{\partial\Omega_2} \underline{u} \cdot \underline{n} d\underline{x} = \int_{\partial_2\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n}_\partial d\underline{x} - \int_{\Gamma} \underline{u}_+ \cdot \underline{n}_\Gamma d\underline{x} \tag{A.10}$$

donde la normal unitaria en Γ se ha tomado hacia afuera de Ω_2. Sumando las ecuaciones (A.9) y (A.10), se obtiene

$$
\begin{array}{rcl}
\int\limits_{\Omega_1} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} & = & \int\limits_{\partial\Omega_1} \underline{u} \cdot \underline{n} d\underline{x} = \int\limits_{\partial_1\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n}_{\partial} d\underline{x} + \int\limits_{\Gamma} \underline{u}_{-} \cdot \underline{n}_{\Gamma} d\underline{x} \\
 & & + \\
\int\limits_{\Omega_2} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} & = & \int\limits_{\partial\Omega_2} \underline{u} \cdot \underline{n} d\underline{x} = \int\limits_{\partial_2\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n}_{\partial} d\underline{x} - \int\limits_{\Gamma} \underline{u}_{+} \cdot \underline{n}_{\Gamma} d\underline{x} \\
 & = & \\
\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} & = & \int\limits_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n} d\underline{x} - \int\limits_{\Gamma} [[\underline{u}]] \cdot \underline{n}_{\Gamma} d\underline{x}
\end{array}
\tag{A.11}
$$

donde $[[\underline{u}]]$ es el salto de la función y la Ec. anterior es la forma generalizada del Teorema de Green a que se ha hecho referencia en este trabajo. ■

Apéndice B

Aquí que

- **Espacios** $L^p(a,b)$. Sea un número real tal que $p \geq 1$.Una función $f\,(x)$ definida sobre un sunconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pertenece a $L^p(\Omega)$ si $f\,(x)$ es medible y la integral (Lebesgue)

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : (\Omega) \to \mathbb{R}, \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\} \tag{B.1}$$

- **La norma en los espacios** $L^p(a,b)$

$$||f(x)||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{B.2}$$

- **Desigualdad de Cauchy-Schwars**

  Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en el intervalo $[a,b]$, entonces la siguiente desigualdad se cumple si f y $g \in L^2(a,b)$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{B.3}$$

Definición 37 *Una función f definida sobre un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ es llamada Lipschitz continua si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \quad \forall x, y \in \Gamma. \tag{B.4}$$

Notemos que una función Lipschitz continua es uniformemente continua.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ un dominio con frontera $\partial\Omega$, sea $x_0 \in \partial\Omega$ y construyamos la bola abierta con centro en x_0 y radio ε, i.e. $B(x_0, \varepsilon)$, entonces definiremos el sistema coordenado $(\xi_1, ..., \xi_n)$ tal que el segmento $\partial\Omega \cap B(x_0, \varepsilon)$ pueda expresarse como una función

$$\xi_n = f(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) \tag{B.5}$$

entonces definimos.

Definición 38 *La frontera $\partial\Omega$ del dominio Ω es llamada de Lipschitz si f definida como en la Ec. (B.4) es una función Lipschitz continua.*

El siguiente teorema resume las propiedades más importantes de los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$.

Teorema 39 *Sea $H^m(\Omega)$ el espacio de Sobolev de orden m y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera Lipschitz. Entonces*

i) $H^r(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ si $r \geq m$

ii) $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^m}$

iii) $H^m(\Omega)$ es la cerradura con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^m}$ del espacio $C^\infty(\overline{\Omega})$.

De la parte *iii*) del teorema anterior, se puede hacer una importante interpretación: Para toda $u \in H^m(\Omega)$ es siempre posible encontrar una función infinitamente diferenciable f, tal que este arbitrariamente cerca de u en el sentido que

$$\|u - f\|_{H^m} < \varepsilon$$

para algún $\varepsilon > 0$ dado.

Cuando $m = 0$, se deduce la propiedad $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ a partir del teorema anterior.

Corolario 40 *El espacio $L^2(\Omega)$ es la cerradura, con respecto a la norma L^2, del espacio $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Otra propiedad, se tiene al considerar a cualquier miembro de $u \in H^m(\Omega)$, este puede ser identificado con una función en $C^m(\overline{\Omega})$, después de que posiblemente sean cambiados algunos valores sobre un conjunto de medida cero, esto queda plasmado en los dos siguientes resultados.

Teorema 41 *Sean X y Y dos espacios de Banach, con $X \subset Y$. Sea $i : X \to Y$ tal que $i(u) = u$. Si el espacio X tiene definida la norma $\|\cdot\|_X$ y el espacio Y tiene definida la norma $\|\cdot\|_Y$, decimos que X está inmersa continuamente en Y si*

$$\|i(u)\|_Y = \|u\|_Y \leq K \|u\|_X$$

para alguna constante $K > 0$.

Teorema 42 *(Inmersión de Sobolev)*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ de Lipschitz. Si $(m-k) > n/2$, entonces toda función en $H^m(\Omega)$ pertenece a $C^k(\overline{\Omega})$, es decir, hay un miembro que pertenece a $C^k(\overline{\Omega})$. Además, la inmersión

$$H^m(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$$

es continua.

Definición 43 ***Derivadas Débiles*** *Supóngase que una función $u(\cdot)$ es localmente integrable que genere una distribución, también denotada por u, que satisface*

$$\langle u, \phi \rangle = \int_\Omega u\phi dx \tag{B.6}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Además, la distribución u posee derivada distribucional de todos los ordenes, en particular la derivada $D^\alpha u$ es definida por

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in D(\Omega). \tag{B.7}$$

por supuesto $D^\alpha u$ puede o no ser una distribución regular. Si es una distribución regular, entonces es generada por una función localmente integrable tal que

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = \int_\Omega D^\alpha u(x)\, \phi(x)\, d\underline{x} \tag{B.8}$$

y se sigue que la función u y $D^{\alpha}u$ están relacionadas por

$$\int_{\Omega} D^{\alpha}u\,(x)\,\phi\,(x)\,d\underline{x} = (-1)^{|m|}\int_{\Omega} u\,(x)\,D^{\alpha}\phi\,(x)\,d\underline{x} \tag{B.9}$$

para $|\alpha| \leq m$.

Definición 44 *Distribución: Una funcional lineal F es continua sobre el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ es llamada una distribución o función generalizada, si y sólo si para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K>0$ y un entero no negativo m tal que*

$$|F\,(\phi)| \leq C_K \sup_{\substack{k\leq m\\ x\in K}} \left|\frac{d^k\phi\,(x)}{dx^k}\right| \qquad \forall\phi\in\mathcal{D}(K) \tag{B.10}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 45 *Sea $\widehat{u} \in \widehat{H}^m\,(\Omega) \cap H^{m-1}\,(\Omega)$ y $\underline{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in N^n$, con $|\underline{\lambda}| = m$. Entonces*

i) Para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se tiene que

$$\sum_{\alpha=1}^{E}\int_{\Omega_\alpha}\phi\frac{\partial^m u_\alpha}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}dx - (-1)^m\int_{\Omega}u\frac{\partial^m\phi}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}dx \tag{B.11}$$
$$= -\int_{\Gamma}\phi\left[\left[\frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\right]\right]n_1^{\lambda_1}n_2^{\lambda_2}\cdots n_n^{\lambda_n}dx$$

ii) $u \in H^m\,(\Omega)$ si y sólo si

$$\left[\left[\frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\right]\right] = 0. \tag{B.12}$$

Para ver detalles de la demostración véase [12]

En nuestro caso se considerará espacios $H^1\,(\Omega)$, por lo tanto del teorema anterior se tiene que si $u \in H^1\,(\Omega)$, y suponiendo $n = 1$, entonces se tiene que

i) Para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, al sustituir en la ec (B.11) se tiene

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^{E} \int_{\Omega_\alpha} \phi \frac{\partial^1 u_\alpha}{\partial x_1} dx - (-1)^1 \int_\Omega u \frac{\partial^1 \phi}{\partial x_1} dx \\
= & -\int_\Gamma \phi \left[\left[\frac{\partial^{1-1} u}{\partial n^{1-1}}\right]\right] n_1^{\lambda_1} dx
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^{E} \int_{\Omega_\alpha} \phi \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} dx + \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx \\
= & -\int_\Gamma \phi \, [[u]] \, n_1 dx
\end{aligned}
$$

ii) $u \in H^1(\Omega)$ si y sólo si

$$
[[u]] = 0
$$

Operadores de extensión $\widehat{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}$

Para cada $u, w \in D$, las siguientes implicaciones se satisfacen.

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega w\mathcal{L}u dx \text{ está bien definida} \quad & \Longrightarrow \quad \int_\Omega w\mathcal{L}u dx = \int_\Omega w\widehat{\mathcal{L}}u dx \\
\int_\Omega u\mathcal{L}^* w dx \text{ está bien definida} \quad & \Longrightarrow \quad \int_\Omega u\mathcal{L}^* w dx = \int_\Omega u\widehat{\mathcal{L}}^* w dx
\end{aligned}
$$

La demostración se hace para la primera ecuación, cuando el orden del operador es 1, es decir,

$$
\mathcal{L} \equiv a(\underline{x}) \, \partial/\partial x_i + b(\underline{x}) \quad \text{donde } i = 1, 2, \ldots, N \tag{B.13}
$$

mientras los coeficientes $a(\underline{x})$ y $b(\underline{x})$ son funciones de $\underline{x}$. Entonces el resultado para el caso cuando $\mathcal{L}$ es de orden arbitrario, puede ser derivado de este caso, por inducción sobre el orden del operador.

Demostración. Para esta elección de $\mathcal{L}$, se tiene que $\mathcal{L}^* \equiv -\partial\left(a\left(\underline{x}w\right)\right)/\partial x_i + b\left(\underline{x}\right)$ y $\underline{\mathfrak{D}}\left(u,w\right)\cdot\underline{n} = awun_i$, así que

$$\mathcal{J}\left(u,w\right) = a\left[\left[u\right]\right]\ \dot{\widehat{w}}n_i \quad \text{y} \quad \mathcal{K}^*\left(u,w\right) = -a\dot{\widehat{u}}\ \left[\left[w\right]\right]n_i \tag{B.14}$$

Se considerarán dos casos, cuando $u\in D\subset H^0\left(\Omega\right)$ y $w\in D\subset H^1\left(\Omega\right)$ o cuando $u\in D\subset H^1\left(\Omega\right)$ y $w\in D\subset H^0\left(\Omega\right),\int_\Omega w\mathcal{L}udx$ está definida. Consideremos primero el caso cuando $u\in H^1\left(\Omega\right)$ y $w\in H^0\left(\Omega\right)$. En este caso

$$\int\limits_\Omega w\mathcal{L}udx = \sum_{i=1}^{E}\int\limits_\Omega w\mathcal{L}udx \tag{B.15}$$

ambas w y $\mathcal{L}u$ pertenecen a $H^0\left(\Omega\right) = L^2\left(\Omega\right)$. Además, cuando $u\in H^1\left(\Omega\right)$, u es continua y $\mathcal{J}\left(u,w\right) = a\left[\left[u\right]\right]\ \dot{\widehat{w}} = 0$ sobre Γ.Entonce se tiene que

$$\int\limits_\Omega w\widehat{\mathcal{L}}udx = \left\langle\left(P-J\right)u,w\right\rangle = \left\langle Pu,w\right\rangle = \sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i} w\mathcal{L}udx \tag{B.16}$$

entonces de ecuaciones (B.15) y (B.16) se tiene que

$$\int\limits_\Omega w\mathcal{L}udx = \int\limits_\Omega w\widehat{\mathcal{L}}udx \tag{B.17}$$

Ahora el otro caso, si $u\in H^0\left(\Omega\right)$ y $w\in H^1\left(\Omega\right)$, entonces de la fórmula de Green estándar usada en la teoría de distribuciones se tiene que

$$\int\limits_\Omega w\mathcal{L}udx = \int\limits_\Omega u\mathcal{L}^*wdx + \left\langle\left(B-C\right)u,w\right\rangle = \sum_{i=1}^{E}\int\limits_{\Omega_i} u\mathcal{L}^*wdx + \left\langle\left(B-C\right)u,w\right\rangle \tag{B.18}$$

la última escuación es por que u y $\mathcal{L}^*w$ pertenecen a $H^0\left(\Omega\right) = L^2\left(\Omega\right)$. Por otro lado, considerando la fórmula Green-Herrera se tiene que

$$\int\limits_\Omega w\widehat{\mathcal{L}}udx = \left\langle\left(P-J\right)u,w\right\rangle = \left\langle\left(Q^*-K^*\right)u,w\right\rangle + \left\langle\left(B-C\right)u,w\right\rangle \tag{B.19}$$

sin embargo, w es continua, por que $w \in H^1(\Omega)$. Entonces $\mathcal{K}^*(u,w) \equiv -a\dot{\widehat{u}}\,[[w]]\,n_i = 0$ sobre Γ. Usando este hecho se tiene que la ec. (B.19) se reduce a

$$\int_{\Omega} w\widehat{\mathcal{L}}udx = \langle Q^* u, w\rangle + \langle (B-C)\,u, w\rangle = \sum_{i=1}^{E}\int_{\Omega_i} u\mathcal{L}^* wdx + \langle (B-C)\,u, w\rangle \tag{B.20}$$

Por lo tanto de las ecs (B.17) y (B.20) se tiene

$$\int_{\Omega} w\mathcal{L}udx = \int_{\Omega} w\widehat{\mathcal{L}}udx$$

que es el resultado deseado. ■