

B.- Otros Ejemplos con FEM-OF Petrov-Galerkin

En esta sección se presentan problemas con diversas condiciones de frontera y de saltos prescritos, así como con diferentes características en los coeficientes de la ecuación diferencial, tanto en 1 como en 2 dimensiones.

B.1.- Ejemplos en Una Dimensión

Se implementarán problemas con condiciones de frontera no homogéneas, con condiciones de salto no homogéneas en la función (solución discontinua), con condiciones de salto no homogéneas en la derivada (solución continua con derivada discontinua), con coeficientes variables en la ecuación diferencial y con coeficientes discontinuos en la ecuación diferencial.

Se trabajarán dos **algoritmos**. Primero, las funciones óptimas se aproximarán con polinomios cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, con polinomios cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , también utilizando FEM para su construcción.

La aproximación cuadrática y la aproximación cúbica fueron planteadas en (6.3.2) y (6.3.3), respectivamente.

B.1.1- Problema 1D-1

Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = (1 - 25\pi^2) \text{Sen}(5\pi x) \quad (\text{B.1})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x) = \text{Sen}(5\pi x)$.

En la figura B.1 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.2 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{4.1})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{5.8})$ para la aproximación cúbica.

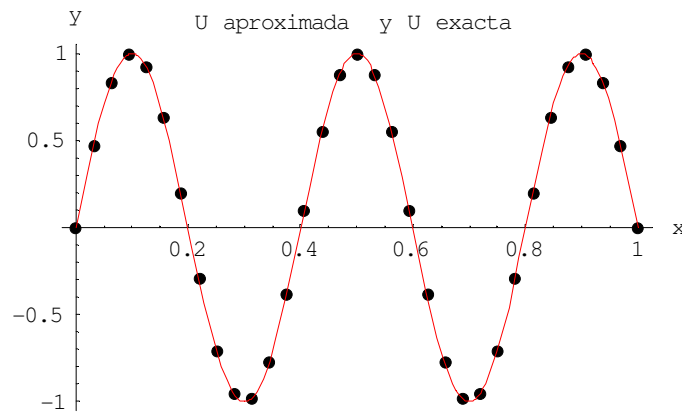


Figura B.1.- Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

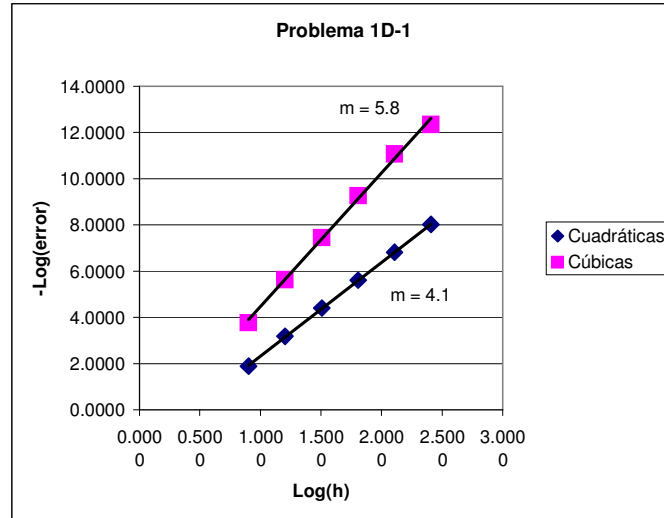


Figura B.2.- Convergencia h .

B.1.2. - Problema 1D-2: Solución Discontinua

Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = f_{\Omega} \quad \text{donde} \quad f_{\Omega} = \begin{cases} (1 - 81\pi^2) \text{Sen}(9\pi x) & , x < 0.5 \\ (81\pi^2 - 1) \text{Sen}(9\pi x) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

En el dominio: $\Omega = [0, 1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de

salto en la función: $[u]_{0.5} = -2$. Su solución analítica es: $u(x) = \begin{cases} \text{Sen}(9\pi x) & , x < 0.5 \\ -\text{Sen}(9\pi x) & , x > 0.5 \end{cases}$.

En la figura B.3 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.4 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{3.9})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{6.1})$ para la aproximación cúbica.

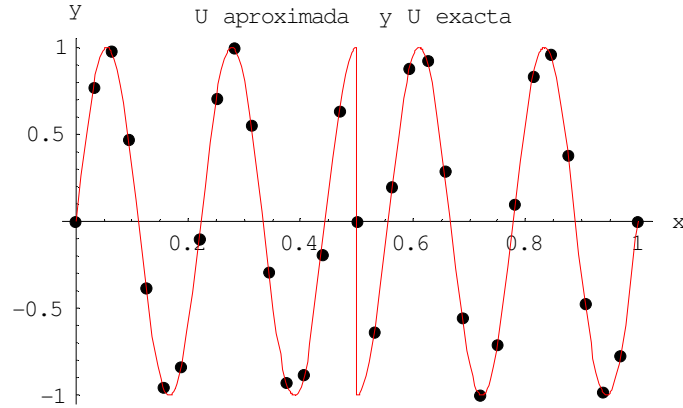


Figura B.3.- Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

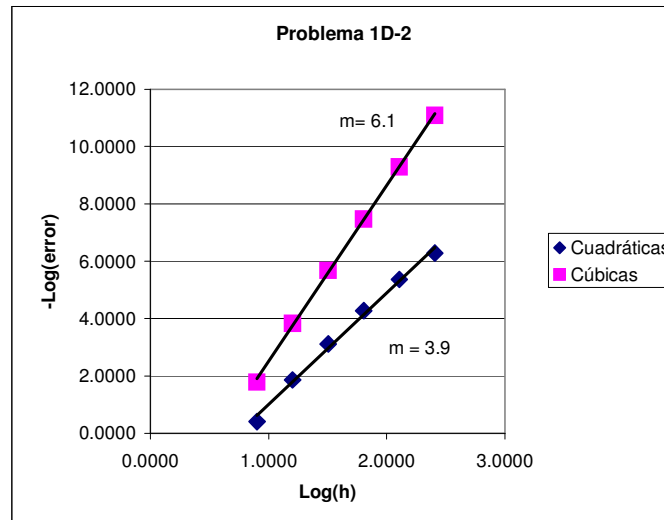


Figura B.4.- Convergencia h .

B.1.3. - Problema 1D-3: Solución con Derivada Discontinua

Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = f_\Omega \quad \text{donde} \quad f_\Omega = \begin{cases} (1 - 64\pi^2) \text{Sen}(8\pi x) & , x < 0.5 \\ (64\pi^2 - 1) \text{Sen}(8\pi x) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de

salto en la derivada: $\left[\frac{du}{dx} \right]_{0.5} = -16\pi \text{Cos}(8\pi x)$. Su solución analítica es:

$$u(x) = \begin{cases} \text{Sen}(8\pi x) & , x < 0.5 \\ -\text{Sen}(8\pi x) & , x > 0.5 \end{cases}$$

En la figura B.5 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la

figura B.6 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{4.1})$ para la

aproximación cuadrática y $O(h^{6.1})$ para la aproximación cúbica.

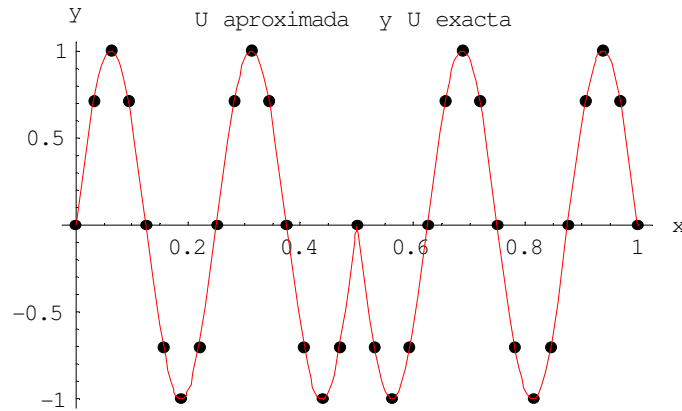


Figura B.5. - Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

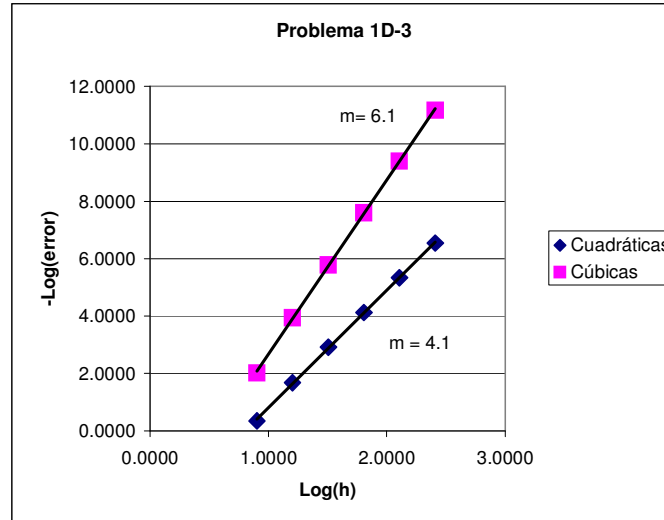


Figura B.6.- Convergencia h .

B.1.4. - Problema 1D-4: Coeficientes Discontinuos

Sea la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes discontinuos:

$$a \frac{d^2u}{dx^2} + u = f_{\Omega} \quad \text{donde} \quad a = \begin{cases} -3 & , x < 0.5 \\ 3 & , x > 0.5 \end{cases}, \quad f_{\Omega} = \begin{cases} (1 + 243\pi^2) \text{Sen}(9\pi x) & , x < 0.5 \\ (1 - 243\pi^2) \text{Sen}(9\pi x) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto homogéneas. Su solución analítica es: $u(x) = \text{Sen}(9\pi x)$.

En la figura B.7 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.8 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{4.2})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^6)$ para la aproximación cúbica.

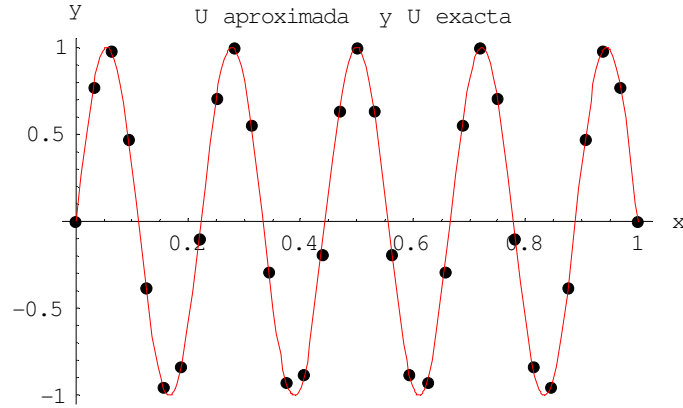


Figura B.7.- Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

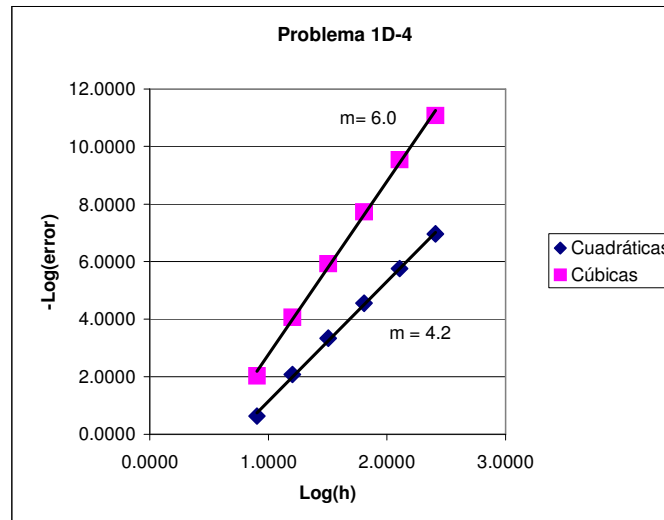


Figura B.8.- Convergencia h .

B.1.5.- Problema 1D-5: Condiciones de Frontera No Homogéneas

Sea la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = (1 - 81\pi^2) \text{Cos}(9\pi x) \tag{B.5}$$

En el dominio: $\Omega = [0, 1]$. Sujeta a condiciones de frontera: $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x) = \text{Cos}(9\pi x)$.

En la figura B.9 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.10 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{3.9})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{6.1})$ para la aproximación cúbica.

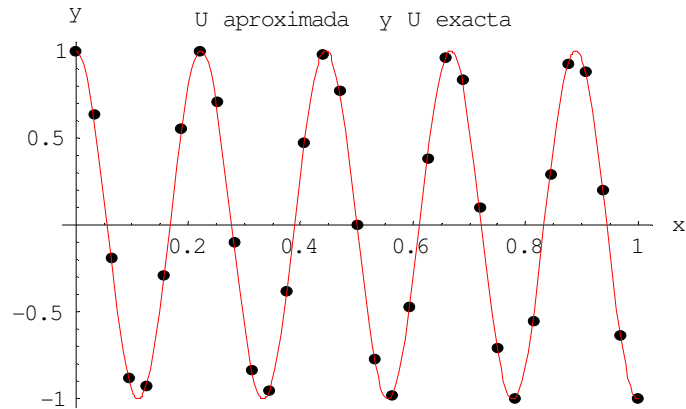


Figura B.9.- Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

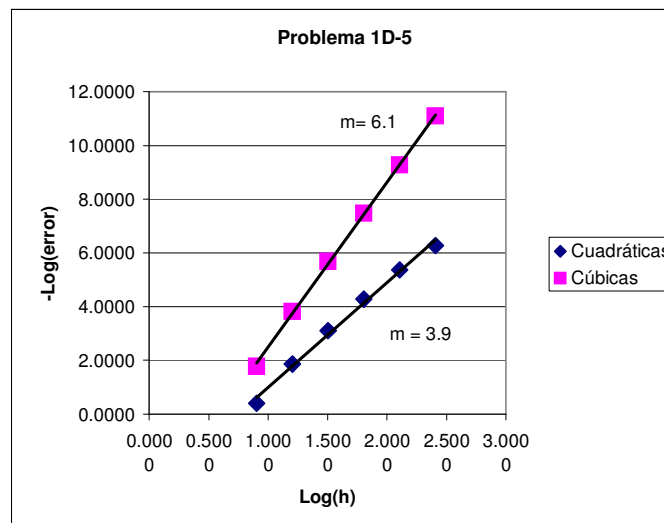


Figura B.10.- Convergencia h .

B.1.6. - Problema 1D-6: Coeficientes Variables

Sea la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables:

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + u = -2 \text{Cos}(\text{Ln}(x)) \quad (\text{B.6})$$

En el dominio: $\Omega = [e^{-\pi}, 1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x) = \text{Sen}(\text{Ln}(x))$.

En la figura B.11 se muestra una gráfica de la solución exacta y de la solución aproximada. En la figura B.12 se muestran los órdenes de convergencia h para cada algoritmo: $O(h^{3.9})$ para la aproximación cuadrática y $O(h^{5.9})$ para la aproximación cúbica.

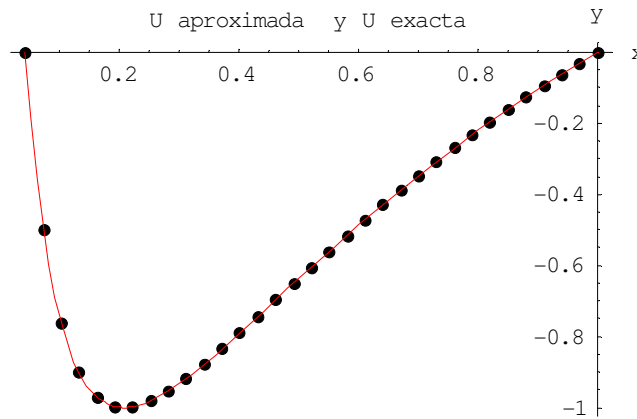


Figura B.11.- Aproximación cúbica en Ω_k con una partición rectangular uniforme de 32 subdominios.

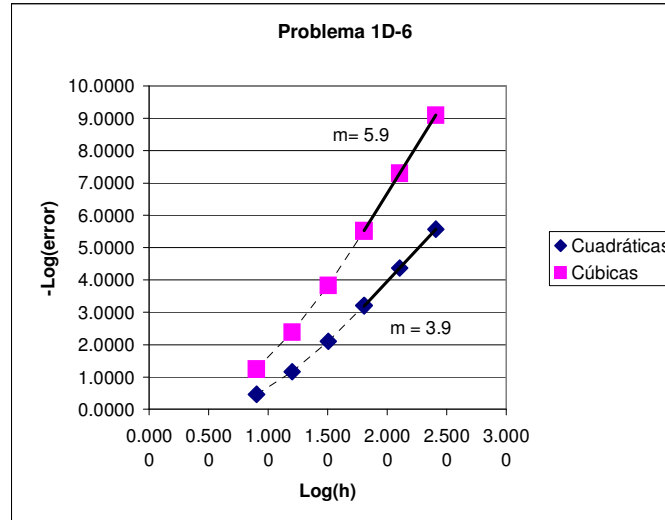


Figura B.12.- Convergencia h .

B.2.- Ejemplos en 2 dimensiones

Se implementarán problemas con condiciones de frontera no homogéneas, con condiciones de salto no homogéneas en la función (solución discontinua), con coeficientes variables en la ecuación diferencial, con coeficientes discontinuos en la ecuación diferencial y problemas con advección dominante.

Se trabajarán un solo **algoritmo**: las funciones óptimas se aproximarán con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción.

Esta aproximación fue planteada en (6.4.6) a (6.4.9).

B.2.1.- Problema 2D-1: Solución Discontinua

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_\Omega \quad \text{donde} \quad f_\Omega = \begin{cases} -2\pi^2 \text{Sen}(\pi x)\text{Sen}(\pi y) & , x < 0.5 \\ 2\pi^2 \text{Sen}(\pi x)\text{Sen}(\pi y) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto en la función: $[u]_{x=0.5} = -2\text{Sen}(\pi y)$. Su solución analítica es:

$$u(x, y) = \begin{cases} \text{Sen}(\pi x)\text{Sen}(\pi y) & , x < 0.5 \\ -\text{Sen}(\pi x)\text{Sen}(\pi y) & , x > 0.5 \end{cases}$$

En la figura B.13 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.14 se muestran los órdenes de convergencia $h: O(h^{3.6})$ para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k .

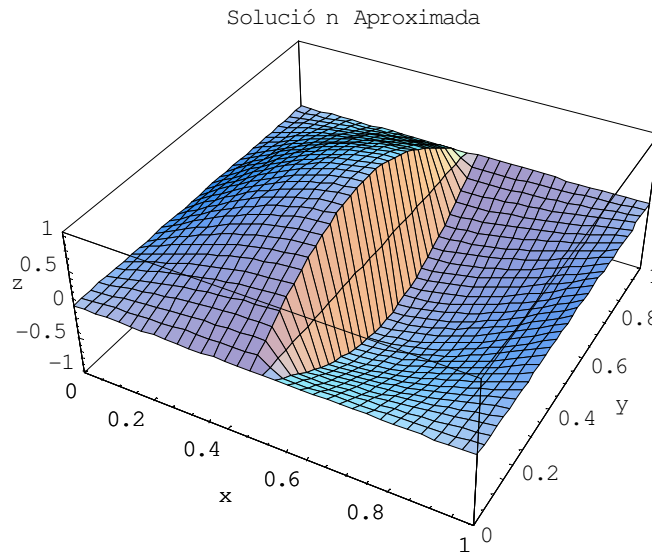


Figura B.13. - Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

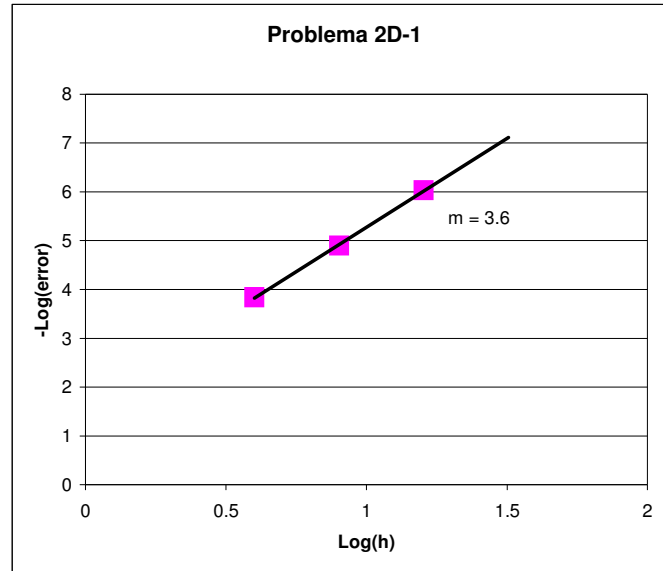


Figura B.14.- Convergencia h .

B.2.2. - Problema 2D-2: Coeficientes Discontinuos

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{\Omega} \quad \text{donde} \quad a = \begin{cases} -3 & , x < 0.5 \\ 3 & , x > 0.5 \end{cases}, \quad f_{\Omega} = \begin{cases} 2\pi^2 \text{Sen}(\pi x) \text{Sen}(\pi y) & , x < 0.5 \\ -4\pi^2 \text{Sen}(\pi x) \text{Sen}(\pi y) & , x > 0.5 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera homogéneas y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x, y) = \text{Sen}(\pi x) \text{Sen}(\pi y)$.

En la figura B.15 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.16 se muestran los órdenes de convergencia $h: O(h^{3.4})$ para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k .

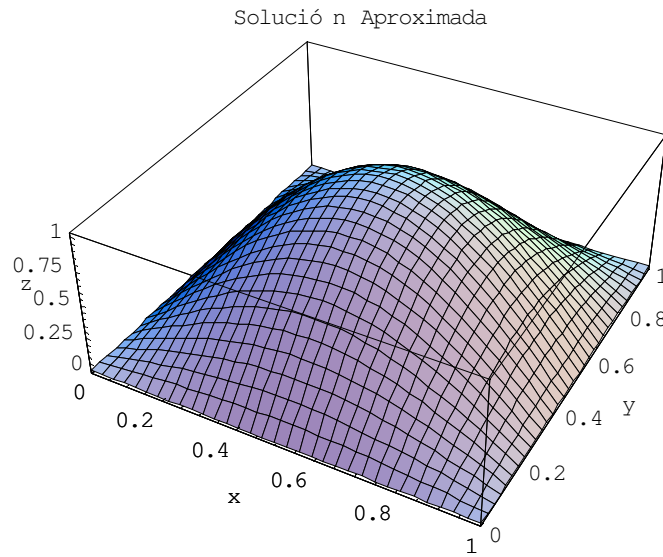


Figura B.15.- Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

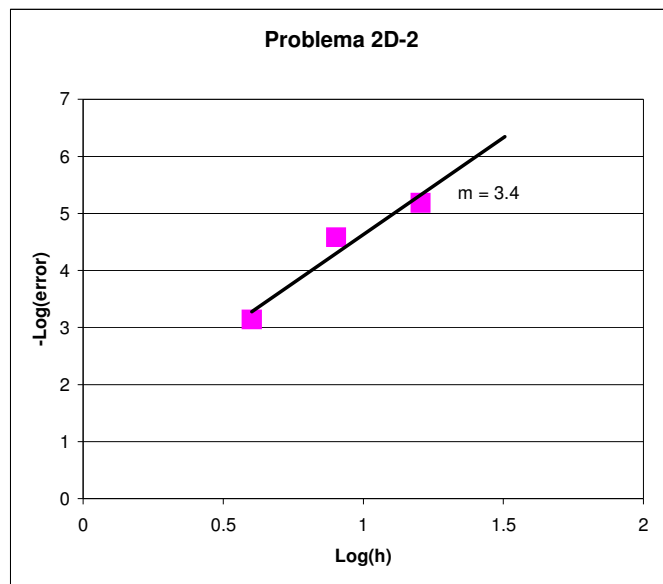


Figura B.16.- Convergencia h .

B.2.3. - Problema 2D-3: Condiciones de Frontera No Homogéneas

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = (1 - x^2 - y^2)e^{xy} \quad (\text{B.9})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera: $u(0,y) = u(x,0) = 1$, $u(1,y) = e^y$, $u(x,1) = e^x$, y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica: $u(x,y) = e^{xy}$.

En la figura B.17 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.18 se muestran los órdenes de convergencia $h: O(h^4)$ para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k .

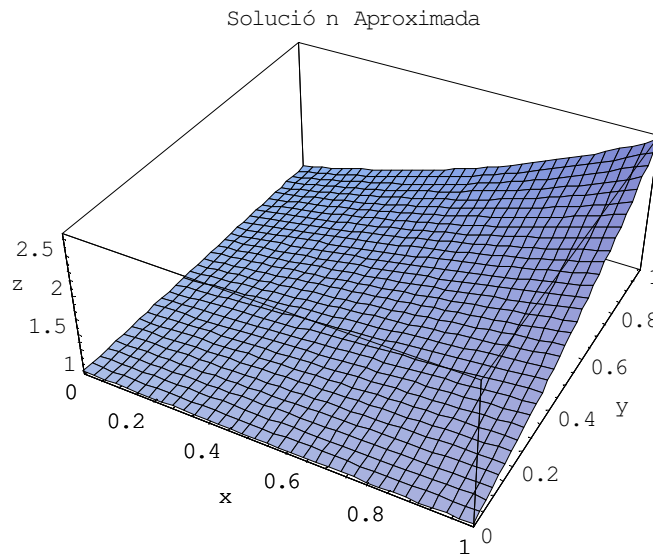


Figura B.17.- Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

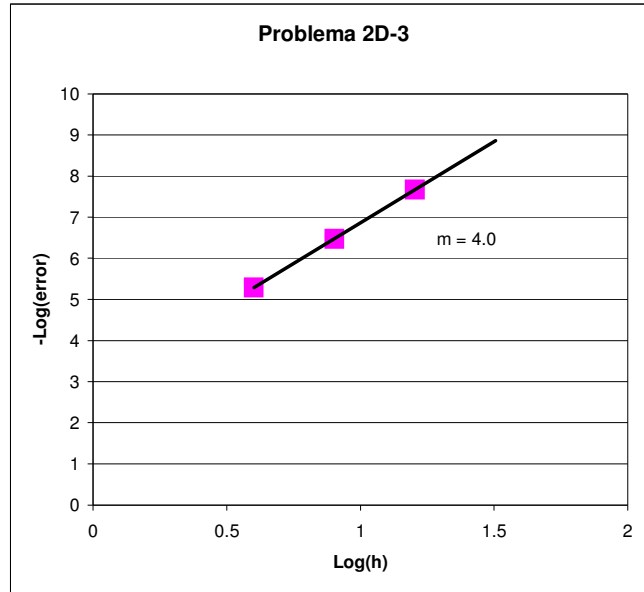


Figura B.18.- Convergencia h .

B.2.4. - Problema 2D-4: Coeficientes Variables

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$-e^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = -e^{-x} - e^{-y} \quad (\text{B.10})$$

En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de frontera: $u(0,y) = e^{-y}$, $u(x,0) = e^{-x}$, $u(1,y) = e^{-1-y}$, $u(x,1) = e^{-x-1}$, y a condiciones de salto homogéneas (sin saltos).

Su solución analítica es: $u(x,y) = e^{-x-y}$.

En la figura B.19 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.20 se muestran los órdenes de convergencia $h: O(h^{3.6})$ para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k .

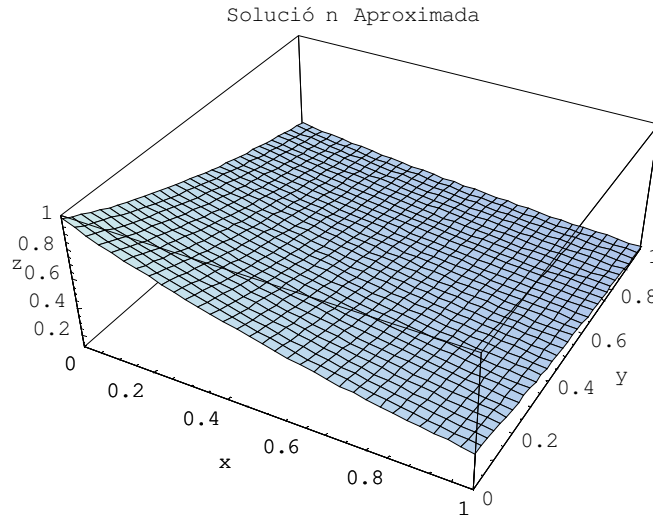


Figura B.19.- Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

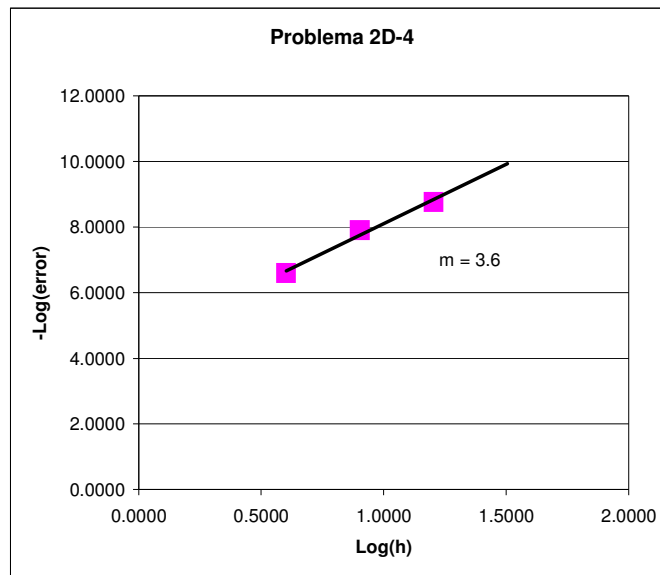


Figura B.20.- Convergencia h .

B.2.5.- Problema 2D-5: Término Advectivo

Sea la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - V_x \frac{\partial u}{\partial x} - V_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{B.11}$$

donde $V_x = |V| \cos(\angle(V))$, $V_y = |V| \sin(\angle(V))$, siendo $|V|$ la magnitud de la velocidad de advección y $\angle(V)$ su dirección. En el dominio: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Sujeta a condiciones de

frontera: $u(0,y) = \frac{e^{V_y y} - e^{V_y}}{1 - e^{V_y}}$, $u(x,0) = \frac{e^{V_x x} - e^{V_x}}{1 - e^{V_x}}$, $u(1,y) = u(x,1) = 0$, y a condiciones de

salto homogéneas (sin saltos). Su solución analítica es: $u(x,y) = \left(\frac{e^{V_x x} - e^{V_x}}{1 - e^{V_x}} \right) \left(\frac{e^{V_y y} - e^{V_y}}{1 - e^{V_y}} \right)$.

En la figura B.21 se muestra una gráfica de la solución aproximada. En la figura B.22 se muestran los órdenes de convergencia h para la aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , los cuales varían según los parámetros elegidos: $|V| = 10, 20, 40, 80$; $\angle(V) = 45^\circ$.

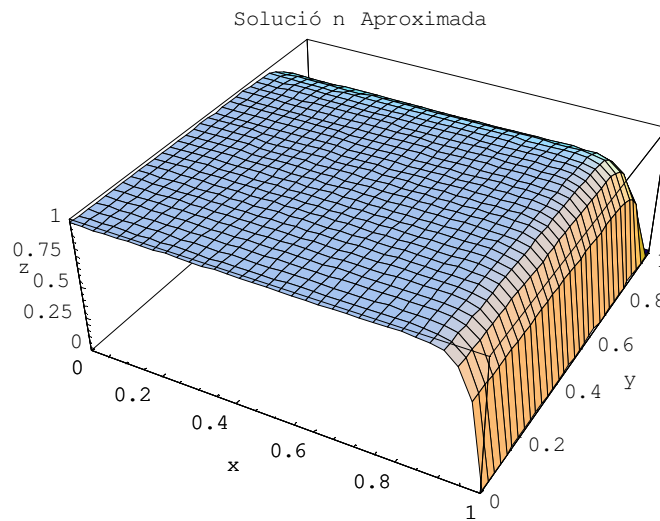


Figura B.21. - Aproximación cúbica en la frontera interior Σ y bi-cúbica en el interior de cada subdominio Ω_k , con una partición rectangular uniforme de 32×32 subdominios.

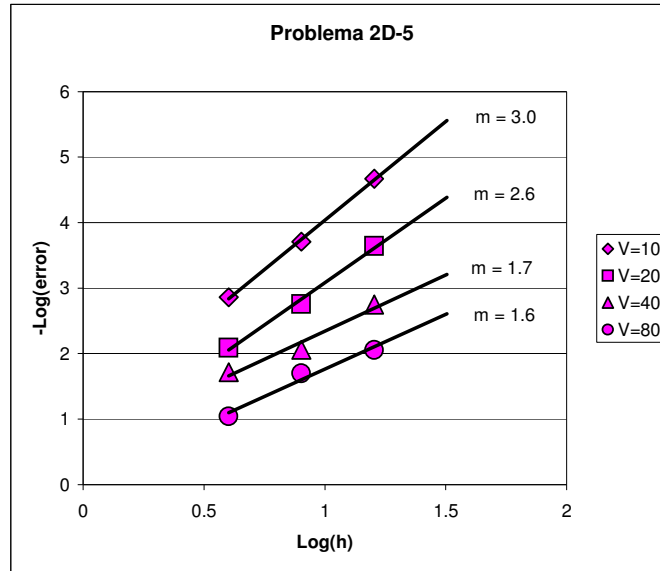


Figura B.22.- Convergencia h .