

Capítulo 6:

Resultados

Caso

Simétrico

Indice:

- 6.1.- Caso Simétrico
- 6.2.- Convergencia h de Error
- 6.3.- Resultados en 1 Dimensión
- 6.4.- Resultados en 2 Dimensiones
- 6.5.- Resultados en 3 Dimensiones

6.1.- Caso Simétrico

El *caso simétrico* corresponde a la ecuación diferencial elíptica general cuando su término $\nabla \cdot (\underline{b}u)$ se anula, es decir, cuando $\underline{b} = \underline{0}$. Esto es:

$$\underline{L} u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + cu = f_\Omega \quad \text{en cada } \Omega_k \quad (6.1.1)$$

Nótese que el operador diferencial es *autoadjunto*. En consecuencia, los métodos de FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin resultan ser los mismos. Esto se debe a que los espacios de funciones de base $\widetilde{O}_B \equiv \widetilde{N}_P \cap \widetilde{N}_B \cap \widetilde{N}_{R_k}$ y de funciones de peso $\widetilde{O}_T \equiv \widetilde{N}_Q \cap \widetilde{N}_C \cap \widetilde{N}_{R_k}$ son iguales. Entonces se usará el nombre de método FEM-OF Petrov-Galerkin (**FEM-OF PG**) para referirse a cualquiera de los tres métodos mencionados.

En las *implementaciones numéricas*, se utilizan tanto funciones óptimas de base *aproximadas* $\widetilde{v} \in \widetilde{O}_B$ como funciones óptimas de peso *aproximadas* $\widetilde{w} \in \widetilde{O}_T$ (recuérdese que aunque ya no son funciones óptimas, se les llamará *funciones óptimas aproximadas*). El *espacio de funciones óptimas aproximadas* está formado por funciones polinomiales por tramos de grado G_Ω en cada subdominio Ω_k de la partición y cuyas trazas en la frontera interior Σ son polinomios por tramos de grado G_Σ . En consecuencia, las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_P y \widetilde{N}_Q solamente se pueden satisfacer de manera aproximada utilizando métodos numéricos

para resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas $\mathcal{L} \tilde{v} = 0$ y $\mathcal{L}^* \tilde{w} = 0$ respectivamente.

La metodología FEM-OF utiliza métodos de elementos finitos (FEM) para resolver los problemas locales que definen a las funciones óptimas aproximadas en cada subdominio Ω_k de la partición. Sin embargo, también se resolverán esos problemas mediante colocación ortogonal.

6.2.- Convergencia h del Error

El error se mide con *norma infinita*, esto es:

$$\|error\|_{\infty} \equiv \max_{\forall k} |\tilde{u}_k - u_k| \quad (6.2.1)$$

donde \tilde{u}_k es la solución aproximada y u_k es la solución exacta en ciertos puntos de control \underline{x}_i .

El *orden de convergencia* h del error $O(h^m)$ es el exponente m , el cual dada una tabla de datos de error contra h (el tamaño de la partición Π), se calcula ajustando la siguiente recta:

$$\log(error) = -m \log(h) + b \quad (6.2.2)$$

En una dimensión, el dominio considerado es $\Omega \equiv [x_0, x_E]$, en el cual se introduce una partición rectangular uniforme de E_x elementos. Entonces, los puntos de control son los nodos interiores de la frontera interior $\Sigma: \{x_i | i=1, \dots, E_x - 1\}$, y el tamaño de la partición es:

$$h = h_x = \frac{x_E - x_0}{E_x}.$$

En dos dimensiones, el dominio considerado es $\Omega \equiv [x_0, x_E] \times [y_0, y_E]$, en el cual se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y$ elementos. Entonces, los puntos de control son los nodos interiores de la frontera interior $\Sigma: \{(x_i, y_j) | i=1, \dots, E_x - 1, j=1, \dots, E_y - 1\}$, y el

tamaño de la partición es: $h = \max \left\{ h_x = \frac{x_E - x_0}{E_x}, h_y = \frac{y_E - y_0}{E_y} \right\}$.

En tres dimensiones, el dominio considerado es $\Omega \equiv [x_0, x_E] \times [y_0, y_E] \times [z_0, z_E]$, en el cual se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y E_z$ elementos. Entonces, los puntos de control son los nodos interiores de la frontera interior Σ :

$$\left\{ (x_i, y_j, z_k) \mid i=1, \dots, E_x-1, j=1, \dots, E_y-1, k=1, \dots, E_z-1 \right\},$$

y el tamaño de la partición es:

$$h = \max \left\{ h_x = \frac{x_E - x_0}{E_x}, h_y = \frac{y_E - y_0}{E_y}, h_z = \frac{z_E - z_0}{E_z} \right\}.$$

6.3- Resultados en Una Dimensión

Sea la ecuación diferencial elíptica ordinaria:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f_\Omega \quad (6.3.1)$$

en $\Omega = [0, 1]$, sujeta a las condiciones de frontera homogéneas $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x) = \text{sen}(\pi x)$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de E_x subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) \mid i = 1, \dots, E_x\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i = 0, \dots, E_x$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son: $\{x_i \mid i = 1, \dots, E_x - 1\}$.

Se trabajarán cuatro **algoritmos**. Primero se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, polinomios cúbicos con FEM. Tercero, polinomios cuadráticos con colocación. Y cuarto, polinomios cúbicos con colocación.

La **aproximación cuadrática** por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado un grado de libertad: el

valor del promedio de la solución. Entonces, a cada uno de estos nodos x_i se le asocia una función óptima aproximada prescribiendo sus trazas en Σ : 1 en el nodo x_i y 0 en los demás nodos. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es el intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_i \\ \widetilde{w}_i \end{pmatrix} = \begin{cases} L_i(x) + C_i^2 L_{i-1}(x) L_i(x) & , x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ L_i(x) + C_i^1 L_i(x) L_{i+1}(x) & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.3.2)$$

donde $L_i(x)$ y $L_{i+1}(x)$ definidos en $[x_i, x_{i+1}]$ son un mapeo afín de los *polinomios de Lagrange* de 1° grado $L_0(\xi) \equiv 1 - \xi$ y $L_1(\xi) \equiv \xi$ definidos en el intervalo $[0, 1]$, respectivamente. Las constantes C_i^1 y C_i^2 se calculan mediante FEM o colocación en cada subdominio Ω_k de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_p o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

La *aproximación cúbica* por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado un grado de libertad: el valor del promedio de la solución. Entonces, a cada uno de estos nodos x_i se le asocia una función óptima aproximada prescribiendo sus trazas en Σ : 1 en el nodo x_i y 0 en los demás nodos. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es el intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_i \\ \widetilde{w}_i \end{pmatrix} = \begin{cases} H_i^0(x) + C_i^{21} H_{i-1}^1(x) + C_i^{22} H_i^1(x) & , x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ H_i^0(x) + C_i^{11} H_i^1(x) + C_i^{12} H_{i+1}^1(x) & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.3.3)$$

donde $H_i^0(x)$, $H_{i+1}^0(x)$, $H_i^1(x)$ y $H_{i+1}^1(x)$ definidos en $[x_i, x_{i+1}]$ son un mapeo afín de los **polinomios de Hermite** de 3º grado $H_0^0(\xi)$, $H_1^0(\xi)$, $H_0^1(\xi)$ y $H_1^1(\xi)$ definidos en el intervalo $[0,1]$, respectivamente. Las constantes C_i^{11} , C_i^{12} , C_i^{21} y C_i^{22} se calculan mediante FEM o colocación en cada subdominio Ω_k de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_p o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

6.3.1. - Aproximación Cuadrática con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construirlos. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática $G_\Omega = 2$ y FEM es $O(h^4)$. En la figura 6.1 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.3.2. - Aproximación Cúbica con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 2 funciones locales de ponderación para construirlos. Se emplea integración por cuadratura con tres puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ y FEM es $O(h^6)$. En la figura 6.1 se muestra la gráfica del error vs. h .

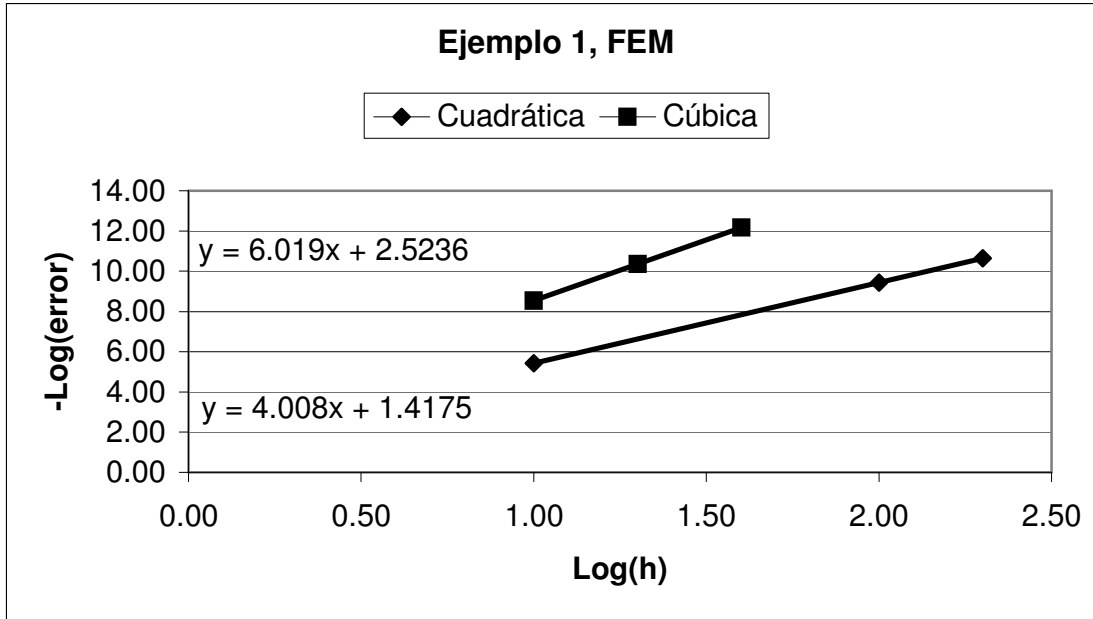


Figura 6.1.- Convergencia h del error para el caso simétrico en una dimensión.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y FEM es $O(h^4)$.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y FEM es $O(h^6)$.

6.3.3.- Aproximación Cuadrática con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 1 punto gaussiano para construir las. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática $G_\Omega = 2$ y colocación es $O(h^4)$. En la figura 6.2 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.3.4.- Aproximación Cúbica con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 2 puntos gaussianos para construir las. Se

emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ y colocación es $O(h^6)$. En la figura 6.2 se muestra la gráfica del error vs. h .

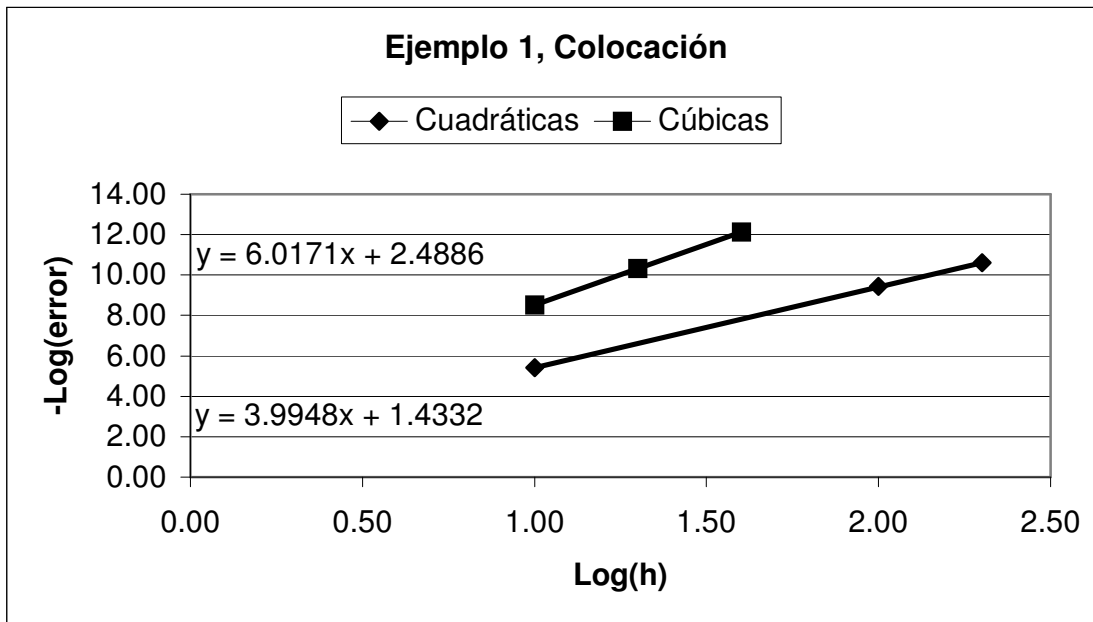


Figura 6.2.- Convergencia h del error para el caso simétrico en una dimensión.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y colocación es $O(h^4)$.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y colocación es $O(h^6)$.

6.3.5.- Análisis de Resultados

- ♦ En la tabla 6.1 se comparan los órdenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ♦ FEM-OF Petrov-Galerkin para el caso simétrico en una dimensión exhibe propiedades de *superconvergencia*. Esta propiedad se presenta cuando se construye las funciones óptimas aproximadas tanto con FEM como con colocación.

- ♦ El orden de (super) convergencia h del error es $O(h^{2G_\Omega})$ donde G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k , en lugar del orden $O(h^{2(G_\Omega-1)})$ que se obtiene al aplicar el método directo de Steklov-Poincaré *convencional* con colocación o el método indirecto de Trefftz-Herrera *convencional* con colocación.

Aproximación	TH Convencional (Colocación)	SP Convencional (Colocación)	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cuadrática en Ω_k	$O(h^2)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
Cúbica en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^6)$

Tabla 6.1. - Convergencia h del error para el caso simétrico en una dimensión.

6.4.- Resultados en Dos Dimensiones

Sea la ecuación diferencial elíptica parcial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = f_{\Omega} \quad (6.4.1)$$

en $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera homogéneas $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u(x,1) = 0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x,y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y$ subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \mid i=1, \dots, E_x; j=1, \dots, E_y\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i=0, \dots, E_x$ e $y_j = j/E_y$ para $j=0, \dots, E_y$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son $\{(x_i, y_j) \mid i=1, \dots, E_x - 1; j=1, \dots, E_y - 1\}$.

Se trabajarán cuatro **algoritmos**. Primero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, igual que el primer algoritmo pero utilizando colocación para la construcción de las funciones óptimas. Tercero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cúbicos por tramos en la

frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Cuarto, igual que el tercer algoritmo pero utilizando colocación para la construcción de las funciones óptimas.

La **aproximación** con polinomios **cúbicos** por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios **bi-cuadráticos** por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado tres grados de libertad: el valor del promedio de la solución, su derivada parcial con respecto a x y su derivada parcial con respecto a y . Entonces, a cada uno de estos nodos (x_i, y_j) se le asocia tres funciones óptimas prescribiendo sus trazas en Σ : $H_i^0(x)H_j^0(y)$, $H_i^1(x)H_j^0(y)$ y $H_i^0(x)H_j^1(y)$, respectivamente. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es la región $[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{v}}_{ij}^0 \\ \widetilde{\mathbf{w}}_{ij}^0 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^0(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.2)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{v}}_{ij}^1 \\ \widetilde{\mathbf{w}}_{ij}^1 \end{pmatrix} = H_i^1(x)H_j^0(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.3)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{v}}_{ij}^2 \\ \widetilde{\mathbf{w}}_{ij}^2 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^1(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.4)$$

donde:

$$N_{ij}(x, y) = \begin{cases} C_{ij}^1 L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] \\ C_{ij}^2 L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] \\ C_{ij}^3 L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] \\ C_{ij}^4 L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.4.5)$$

Las constantes C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , C_{ij}^3 y C_{ij}^4 se calculan mediante FEM o colocación en cada subdominio Ω_k de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_P o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

La *aproximación* con polinomios *cúbicos* por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios *bi-cúbicos* por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado tres grados de libertad: el valor del promedio de la solución, su derivada parcial con respecto a x y su derivada parcial con respecto a y . Entonces, a cada uno de estos nodos (x_i, y_j) se le asocia tres funciones óptimas prescribiendo sus trazas en Σ : $H_i^0(x)H_j^0(y)$, $H_i^1(x)H_j^0(y)$ y $H_i^0(x)H_j^1(y)$, respectivamente. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es la región $[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^0 \\ \widetilde{w}_{ij}^0 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^0(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.6)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^1 \\ \widetilde{w}_{ij}^1 \end{pmatrix} = H_i^1(x)H_j^0(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.7)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{v}_{ij}^2 \\ \widetilde{w}_{ij}^2 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^1(y) + N_{ij}(x, y) \quad (6.4.8)$$

donde:

$$N_{ij}(x, y) = \begin{cases} C_{ij}^{11}H_i^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{12}H_i^1(x)H_{j+1}^1(y) + C_{ij}^{13}H_{i+1}^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{14}H_{i+1}^1(x)H_{j+1}^1(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ C_{ij}^{21}H_{i-1}^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{22}H_{i-1}^1(x)H_{j+1}^1(y) + C_{ij}^{23}H_i^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{24}H_i^1(x)H_{j+1}^1(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ C_{ij}^{31}H_{i-1}^1(x)H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^{32}H_{i-1}^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{33}H_i^1(x)H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^{34}H_i^1(x)H_j^1(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ C_{ij}^{41}H_i^1(x)H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^{42}H_i^1(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{43}H_{i+1}^1(x)H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^{44}H_{i+1}^1(x)H_j^1(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.4.9)$$

Las constantes $\{C_{ij}^{11}, C_{ij}^{12}, C_{ij}^{13}, C_{ij}^{14}\}$, $\{C_{ij}^{21}, C_{ij}^{22}, C_{ij}^{23}, C_{ij}^{24}\}$, $\{C_{ij}^{31}, C_{ij}^{32}, C_{ij}^{33}, C_{ij}^{34}\}$ y $\{C_{ij}^{41}, C_{ij}^{42}, C_{ij}^{43}, C_{ij}^{44}\}$ se calculan mediante FEM o colocación en cada subdominio Ω_k de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_p o \widetilde{N}_q , según sea el caso.

Particularmente para los *dominios rectangulares*, los nodos que están en las aristas de la frontera exterior y que no son esquinas, tienen asociado un solo grado de libertad: su derivada normal. Así, a los nodos ubicados en las fronteras $x=c$ les corresponde la derivada parcial con respecto a x ; mientras que a los nodos ubicadas en las fronteras $y=c$, la derivada parcial con respecto a y .

Los nodos que son esquinas no tienen asociado ningún grado de libertad.

6.4.1.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y FEM es $O(h^{3.3})$. En la figura 6.3 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.4.2.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza

colocación con 1×1 punto gaussiano para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y colocación es $O(h^{2.4})$. En la figura 6.3 se muestra la gráfica del error vs. h .

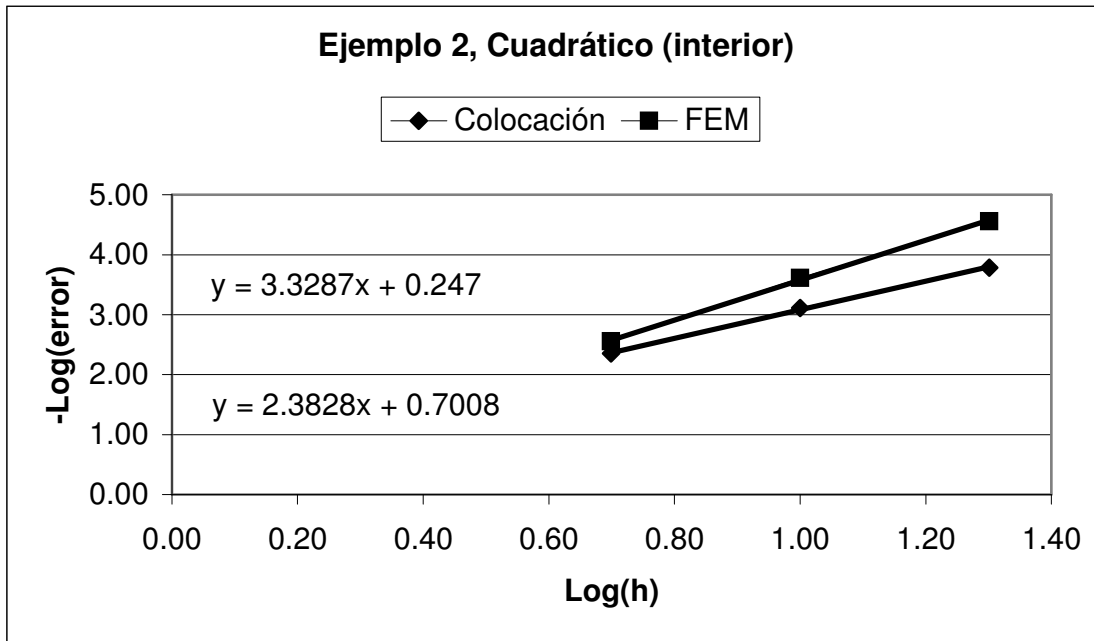


Figura 6.3. - Convergencia h del error para el caso simétrico en dos dimensiones. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y colocación es $O(h^{2.4})$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y FEM es $O(h^{3.3})$.

6.4.3. - Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con

4 funciones de ponderación locales para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$. En la figura 6.4 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.4.4.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_b$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_t$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 2×2 puntos gaussianos para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_k y colocación es $O(h^{3.9})$. En la figura 6.4 se muestra la gráfica del error vs. h .

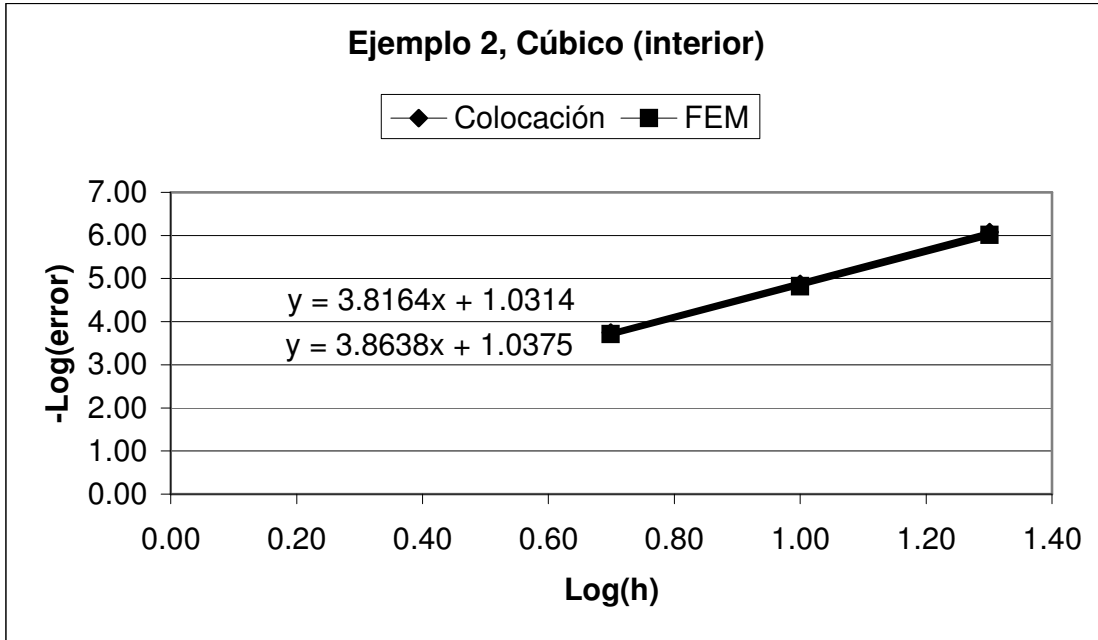


Figura 6.4.- Convergencia h del error para el caso simétrico en dos dimensiones.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cúbica en Ω_k y colocación es $O(h^{3.9})$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cúbica en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$.

6.4.5.- Análisis de Resultados

- ◆ En las tablas 6.2 y 6.3 se comparan los órdenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ◆ **FEM-OF Petrov-Galerkin** para el caso simétrico en dos dimensiones **NO** exhibe propiedades de *superconvergencia*.
- ◆ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con **FEM**, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, G_{\Omega_k} + 1\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_{Ω_k} es el grado de los polinomios en Ω_k .

- ♦ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con *colocación*, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2(G_\Omega - 1)\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k .

Aproximación	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cúbica en Σ y bi-cuadrática en Ω_k	$O(h^{2.4})$	$O(h^{3.3})$

Tabla 6.2. - Convergencia h del error en dos dimensiones para el caso simétrico.

Aproximación	TH Convencional (Colocación)	SP Convencional (Colocación)	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cúbica en Σ y bi-cúbica en Ω_k	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.9})$	$O(h^{3.8})$

Tabla 6.3. - Convergencia h del error en dos dimensiones para el caso simétrico.

6.5.- Resultados en Tres Dimensiones

Sea la ecuación diferencial elíptica parcial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f_{\Omega} \quad (6.5.1)$$

en $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera homogéneas $u(0, y, z) = 0$, $u(1, y, z) = 0$, $u(x, 0, z) = 0$, $u(x, 1, z) = 0$, $u(x, y, 0) = 0$, $u(x, y, 1) = 0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x, y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \text{sen}(\pi z)$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y E_z$ subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k) \mid i = 1, \dots, E_x; j = 1, \dots, E_y; k = 1, \dots, E_z\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i = 0, \dots, E_x$, $y_j = j/E_y$ para $j = 0, \dots, E_y$ y $z_k = k/E_z$ para $k = 0, \dots, E_z$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son $\{(x_i, y_j, z_k) \mid i = 1, \dots, E_x - 1; j = 1, \dots, E_y - 1; k = 1, \dots, E_z - 1\}$.

Se trabajarán solamente dos **algoritmos**. Primero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios bi-cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios tri-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_l , utilizando FEM para su construcción. Segundo, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios bi-cúbicos por tramos en la frontera

interior Σ y con polinomios tri-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_l , utilizando FEM para su construcción.

La *aproximación* con polinomios *bi-cúbicos* por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios *tri-cuadráticos* por tramos en el interior de cada subdominio Ω_l consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado siete grados de libertad: el valor del promedio de la solución, su derivada parcial con respecto a x , su derivada parcial con respecto a y , su derivada parcial con respecto a z , su segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y , su segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z , y finalmente, su segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z . Entonces, a cada uno de estos nodos (x_i, y_j, z_k) se le asocia siete funciones óptimas prescribiendo sus trazas en Σ : $H_i^0(x)H_j^0(y)H_k^0(z)$, $H_i^1(x)H_j^0(y)H_k^0(z)$, $H_i^0(x)H_j^1(y)H_k^0(z)$, $H_i^0(x)H_j^0(y)H_k^1(z)$, $H_i^1(x)H_j^1(y)H_k^0(z)$, $H_i^1(x)H_j^0(y)H_k^1(z)$ y $H_i^0(x)H_j^1(y)H_k^1(z)$, respectivamente. De esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es la región $[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \times [z_{k-1}, z_{k+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^0 \\ \widetilde{W}_{ijk}^0 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^0(y)H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.2)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^1 \\ \widetilde{W}_{ijk}^1 \end{pmatrix} = H_i^1(x)H_j^0(y)H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.3)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^2 \\ \widetilde{W}_{ijk}^2 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^1(y)H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.4)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^3 \\ \widetilde{W}_{ijk}^3 \end{pmatrix} = H_i^0(x)H_j^0(y)H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.5)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^4 \\ \widetilde{W}_{ijk}^4 \end{pmatrix} = H_i^1(x)H_j^1(y)H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.6)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{V}}_{ijk}^5 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_{ijk}^5 \end{pmatrix} = H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.7)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{V}}_{ijk}^6 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_{ijk}^6 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.8)$$

donde:

$$N_{ijk}(x, y, z) = \begin{cases} C_{ijk}^1 L_i(x) L_{i+1}(x) L_j(y) L_{j+1}(y) L_k(z) L_{k+1}(z) & , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] [z_k, z_{k+1}] \\ C_{ijk}^2 L_{i-1}(x) L_i(x) L_j(y) L_{j+1}(y) L_k(z) L_{k+1}(z) & , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] [z_k, z_{k+1}] \\ C_{ijk}^3 L_{i-1}(x) L_i(x) L_{j-1}(y) L_j(y) L_k(z) L_{k+1}(z) & , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] [z_k, z_{k+1}] \\ C_{ijk}^4 L_i(x) L_{i+1}(x) L_{j-1}(y) L_j(y) L_k(z) L_{k+1}(z) & , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] [z_k, z_{k+1}] \\ C_{ijk}^5 L_i(x) L_{i+1}(x) L_j(y) L_{j+1}(y) L_{k-1}(z) L_k(z) & , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] [z_{k-1}, z_k] \\ C_{ijk}^6 L_{i-1}(x) L_i(x) L_j(y) L_{j+1}(y) L_{k-1}(z) L_k(z) & , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] [z_{k-1}, z_k] \\ C_{ijk}^7 L_{i-1}(x) L_i(x) L_{j-1}(y) L_j(y) L_{k-1}(z) L_k(z) & , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] [z_{k-1}, z_k] \\ C_{ijk}^8 L_i(x) L_{i+1}(x) L_{j-1}(y) L_j(y) L_{k-1}(z) L_k(z) & , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] [z_{k-1}, z_k] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (6.5.9)$$

Las constantes C_{ijk}^1 , C_{ijk}^2 , C_{ijk}^3 , C_{ijk}^4 , C_{ijk}^5 , C_{ijk}^6 , C_{ijk}^7 y C_{ijk}^8 , se calculan mediante FEM en cada subdominio Ω_i de su soporte, de modo que satisfagan las condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_p o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

La *aproximación* con polinomios *bi-cúbicos* por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios *tri-cúbicos* por tramos en el interior de cada subdominio Ω_i consiste en lo siguiente. Cada nodo interior de la frontera interior Σ tiene asociado siete grados de libertad: el valor del promedio de la solución, su derivada parcial con respecto a x , su derivada parcial con respecto a y , su derivada parcial con respecto a z , su segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y , su segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z , y finalmente, su segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z . Entonces, a cada uno de estos nodos (x_i, y_j, z_k) se le asocia siete funciones óptimas prescribiendo sus trazas en Σ : $H_i^0(x) H_j^0(y) H_k^0(z)$, $H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^0(z)$, $H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^0(z)$, $H_i^0(x) H_j^0(y) H_k^1(z)$, $H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^0(z)$, $H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^1(z)$ y $H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^1(z)$, respectivamente. De

esta forma se tiene que el soporte de cada función óptima aproximada es la región $[x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \times [z_{k-1}, z_{k+1}]$:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^0 \\ \widetilde{W}_{ijk}^0 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^0(y) H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.10)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^1 \\ \widetilde{W}_{ijk}^1 \end{pmatrix} = H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.11)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^2 \\ \widetilde{W}_{ijk}^2 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.12)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^3 \\ \widetilde{W}_{ijk}^3 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^0(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.13)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^4 \\ \widetilde{W}_{ijk}^4 \end{pmatrix} = H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^0(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.14)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^5 \\ \widetilde{W}_{ijk}^5 \end{pmatrix} = H_i^1(x) H_j^0(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.15)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}_{ijk}^6 \\ \widetilde{W}_{ijk}^6 \end{pmatrix} = H_i^0(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + N_{ijk}(x, y, z) \quad (6.5.16)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 & N_{ijk}(x, y, z) = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & C_{ijk}^{11} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{12} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{13} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{14} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{15} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{16} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{17} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{18} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k+1}^1(z), \\
 & \quad , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] [z_k, z_{k+1}] \\
 & C_{ijk}^{21} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{22} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{23} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{24} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{25} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{26} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{27} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{28} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k+1}^1(z), \\
 & \quad , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] [z_k, z_{k+1}] \\
 & C_{ijk}^{31} H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{32} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{33} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{34} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{35} H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{36} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{37} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{38} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z), \\
 & \quad , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] [z_k, z_{k+1}] \\
 & C_{ijk}^{41} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{42} H_{i+1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{43} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{44} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{45} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{46} H_{i+1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{47} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z) + C_{ijk}^{48} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k+1}^1(z), \\
 & \quad , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] [z_k, z_{k+1}] \\
 & C_{ijk}^{51} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{52} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{53} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{54} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{55} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{56} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{57} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{58} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z), \\
 & \quad , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] [z_{k-1}, z_k] \\
 & C_{ijk}^{61} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{62} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{63} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{64} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{65} H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{66} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{67} H_{i+1}^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{68} H_i^1(x) H_{j+1}^1(y) H_k^1(z), \\
 & \quad , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] [z_{k-1}, z_k] \\
 & C_{ijk}^{71} H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{72} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{73} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{74} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{75} H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{76} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{77} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{78} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z), \\
 & \quad , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] [z_{k-1}, z_k] \\
 & C_{ijk}^{81} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{82} H_{i+1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{83} H_i^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + C_{ijk}^{84} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_{k-1}^1(z) + \\
 & + C_{ijk}^{85} H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{86} H_{i+1}^1(x) H_{j-1}^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{87} H_i^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z) + C_{ijk}^{88} H_{i+1}^1(x) H_j^1(y) H_k^1(z), \\
 & \quad , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] [z_{k-1}, z_k] \\
 & \quad \left\{ \begin{aligned}
 & 0, \\
 & \text{, otro}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right. \\
 & \tag{6.5.17}
 \end{aligned}$$

Las constantes:

$$\begin{aligned}
 & \{ C_{ijk}^{11}, C_{ijk}^{12}, C_{ijk}^{13}, C_{ijk}^{14}, C_{ijk}^{15}, C_{ijk}^{16}, C_{ijk}^{17}, C_{ijk}^{18} \}, \{ C_{ijk}^{21}, C_{ijk}^{22}, C_{ijk}^{23}, C_{ijk}^{24}, C_{ijk}^{25}, C_{ijk}^{26}, C_{ijk}^{27}, C_{ijk}^{28} \}, \\
 & \{ C_{ijk}^{31}, C_{ijk}^{32}, C_{ijk}^{33}, C_{ijk}^{34}, C_{ijk}^{35}, C_{ijk}^{36}, C_{ijk}^{37}, C_{ijk}^{38} \}, \{ C_{ijk}^{41}, C_{ijk}^{42}, C_{ijk}^{43}, C_{ijk}^{44}, C_{ijk}^{45}, C_{ijk}^{46}, C_{ijk}^{47}, C_{ijk}^{48} \}, \\
 & \{ C_{ijk}^{51}, C_{ijk}^{52}, C_{ijk}^{53}, C_{ijk}^{54}, C_{ijk}^{55}, C_{ijk}^{56}, C_{ijk}^{57}, C_{ijk}^{58} \}, \{ C_{ijk}^{61}, C_{ijk}^{62}, C_{ijk}^{63}, C_{ijk}^{64}, C_{ijk}^{65}, C_{ijk}^{66}, C_{ijk}^{67}, C_{ijk}^{68} \}, \\
 & \{ C_{ijk}^{71}, C_{ijk}^{72}, C_{ijk}^{73}, C_{ijk}^{74}, C_{ijk}^{75}, C_{ijk}^{76}, C_{ijk}^{77}, C_{ijk}^{78} \} \text{ y } \{ C_{ijk}^{81}, C_{ijk}^{82}, C_{ijk}^{83}, C_{ijk}^{84}, C_{ijk}^{85}, C_{ijk}^{86}, C_{ijk}^{87}, C_{ijk}^{88} \}
 \end{aligned}$$

se calculan mediante FEM en cada subdominio Ω_l de su soporte, de modo que satisfagan las

condiciones impuestas por los espacios nulos \widetilde{N}_p o \widetilde{N}_Q , según sea el caso.

Particularmente para los *dominios prismáticos rectangulares rectos*, los nodos que están en las caras de la frontera exterior y que no están en las aristas ni son esquinas, tienen asociado tres grados de libertad: su derivada normal y sus dos segundas derivadas parciales cruzadas que involucren la dirección de la normal. Así, a los nodos ubicados en las fronteras $x=c$ les corresponde la derivada parcial con respecto a x , la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y y la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z ; los nodos ubicados en las fronteras $y=c$ les corresponde la derivada parcial con respecto a y , la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y y la segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z ; y finalmente, los nodos ubicados en las fronteras $z=c$ les corresponde la derivada parcial con respecto a z , la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z y la segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z .

Los nodos que están en las aristas de la frontera exterior y que no son esquinas, tienen asociado un solo grado de libertad: su segunda derivada parcial cruzada que involucre las direcciones normales. Así, a los nodos ubicados en las aristas $x=c_1, y=c_2$ les corresponde la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x e y ; los nodos ubicados en las aristas $x=c_1, z=c_2$ les corresponde la segunda derivada parcial cruzada con respecto a x y z ; y finalmente, los nodos ubicados en las aristas $y=c_1, z=c_2$ les corresponde la segunda derivada parcial cruzada con respecto a y y z .

Los nodos que son esquinas no tienen asociado ningún grado de libertad.

6.5.1.- Aproximación Bi-cúbica en Σ y Tri-cuadrática en Ω_I con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios bi-cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios tri-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_I y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios tri-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_I . Se utiliza integración

por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación bi-cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , tri-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_I y FEM es $O(h^3)$. En la figura 6.5 se muestra la gráfica del error vs. h .

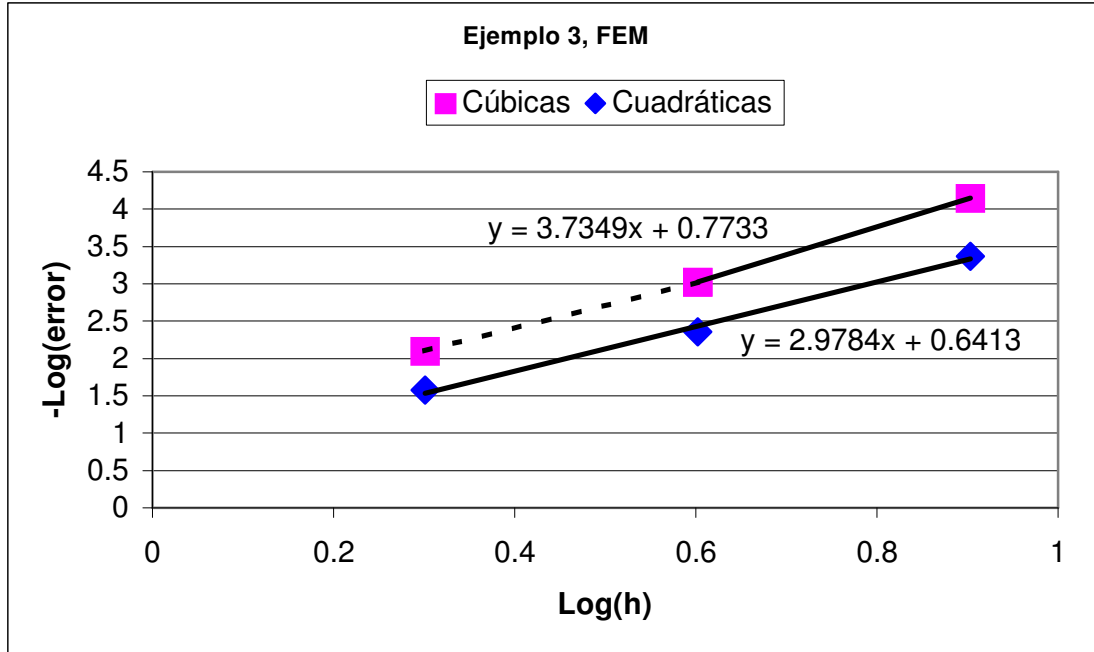


Figura 6.5. - Convergencia h del error para el caso simétrico en tres dimensiones. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación bi-cúbica en Σ , tri-cuadrática en Ω_I y FEM es $O(h^3)$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación bi-cúbica en Σ , tri-cúbica en Ω_I y FEM es $O(h^{3.7})$.

6.5.2.- Aproximación Bi-cúbica en Σ y Tri-cúbica en Ω_I con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios bi-cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios tri-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_I y se utiliza FEM con 8 funciones de ponderación locales para construirlas. La función $u_p \in \hat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios tri-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_I . Se utiliza

integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación bi-cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , tri-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_l y FEM es $O(h^{3.7})$. En la figura 6.5 se muestra la gráfica del error vs. h .

6.5.3. - Análisis de Resultados

- ♦ En la tabla 6.4 se comparan los órdenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ♦ **FEM-OF Petrov-Galerkin** para el caso simétrico en tres dimensiones **NO** exhibe propiedades de *superconvergencia*.
- ♦ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con **FEM**, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, G_\Omega + 1\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k .

Aproximación	FEM-OF PG (FEM)
Bi-cúbica en Σ y tri-cuadrática en Ω_l	$O(h^3)$
Bi-cúbica en Σ y tri-cúbica en Ω_l	$O(h^{3.7})$

Tabla 6.4. - Convergencia h del error en tres dimensiones para el caso simétrico.

