

Capítulo 7:

Resultados

Caso

No Simétrico

Indice:

- 7.1.- Caso No Simétrico
- 7.2.- Resultados en 1 Dimensión
- 7.3.- Resultados en 2 Dimensiones

7.1- Caso No Simétrico

El *caso no simétrico* corresponde a la ecuación diferencial elíptica general cuando su término $\nabla \cdot (\underline{b}u)$ no se anula, es decir, cuando $\underline{b} \neq \underline{0}$. Esto es:

$$\underline{L} u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_\Omega \quad \text{en cada } \Omega_k \quad (7.1.1)$$

Nótese que el operador diferencial adjunto es diferente que el operador diferencial original. En consecuencia, los métodos FEM-OF Trefftz-Herrera (**FEM-OF TH**), FEM-OF Steklov-Poincaré (**FEM-OF SP**) y FEM-OF Petrov-Galerkin (**FEM-OF PG**) resultan ser distintos. Esto se debe a que los espacios de funciones de base $\widetilde{O}_B \equiv \widetilde{N}_P \cap \widetilde{N}_B \cap \widetilde{N}_{R_j}$ y de funciones de peso $\widetilde{O}_T \equiv \widetilde{N}_Q \cap \widetilde{N}_C \cap \widetilde{N}_{R_k}$ no son iguales.

7.2.- Resultados en Una Dimensión

Sea la ecuación diferencial elíptica ordinaria:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + V \frac{du}{dx} = 0 \quad (7.2.1)$$

en $\Omega = [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera $u(0)=1$, $u(1)=0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x) = \frac{e^{Vx} - e^V}{1 - e^V}$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de E_x subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) \mid i=1, \dots, E_x\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i=0, \dots, E_x$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son: $\{x_i \mid i=1, \dots, E_x - 1\}$.

Se trabajarán cuatro **algoritmos**. Primero se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, polinomios cúbicos con FEM. Tercero, polinomios cuadráticos con colocación. Y cuarto, polinomios cúbicos con colocación.

La aproximación cuadrática y la aproximación cúbica fueron planteadas en (6.3.2) y (6.3.3), respectivamente.

7.2.1.- Aproximación Cuadrática con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construirlas. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. Se considera el parámetro $V = 20$. El orden de convergencia h del error para los tres métodos, FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin, con aproximación cuadrática $G_\Omega = 2$ y FEM es $O(h^4)$. En la figura 7.1 se muestra la gráfica del error vs. h .

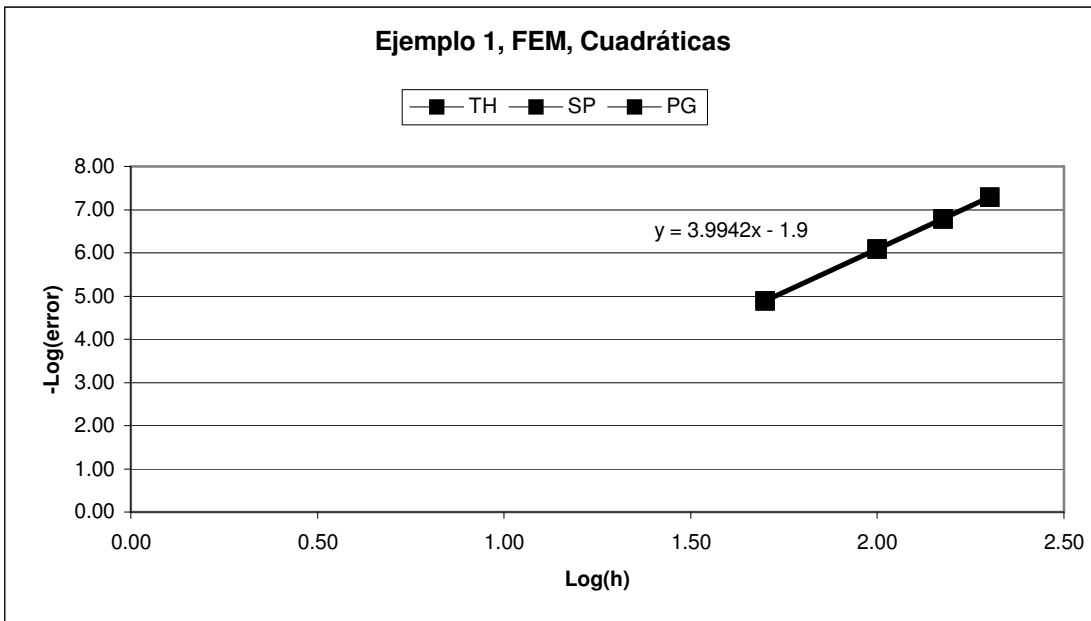


Figura 7.1.- Convergencia h del error para el caso no simétrico en una dimensión. Para FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y FEM es $O(h^4)$.

7.2.2. - Aproximación Cúbica con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 2 funciones de ponderación locales para construirlas. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. Se considera el parámetro $V = 20$. El orden de convergencia h del error para los tres métodos, FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin, con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ y FEM es $O(h^6)$. En la figura 7.2 se muestra la gráfica del error vs. h .

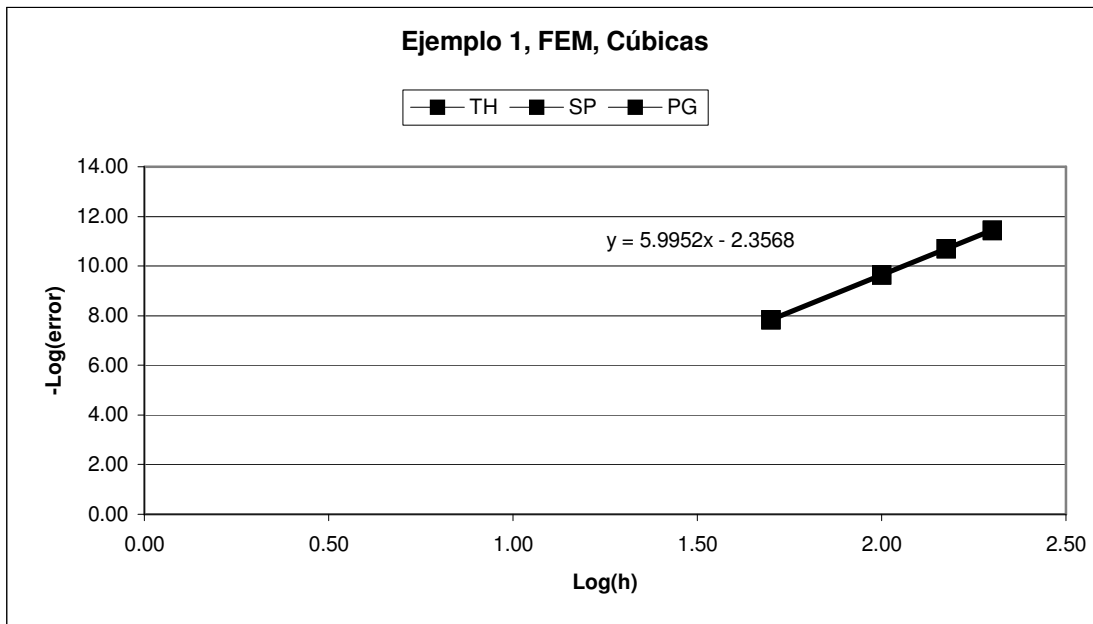


Figura 7.2.- Convergencia h del error para el caso no simétrico en una dimensión. Para FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y FEM es $O(h^6)$.

7.2.3.- Aproximación Cuadrática con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 1 punto gaussiano para construirlos. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. Se considera el parámetro $V=20$. El orden de convergencia h del error para los tres métodos, FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin, con aproximación cuadrática $G_\Omega=2$ y colocación es $O(h^4)$. En la figura 7.3 se muestra la gráfica del error vs. h .

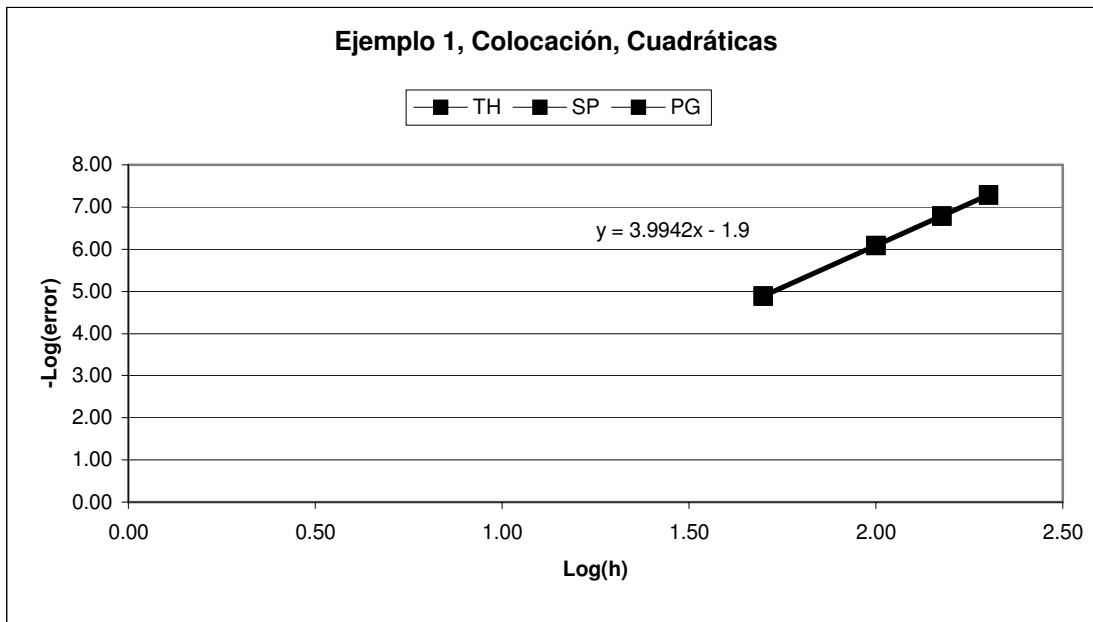


Figura 7.3.- Convergencia h del error para el caso no simétrico en una dimensión. Para FEM-OF Trefftz-Herrera, FEM-OF Steklov-Poincaré y FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y colocación es $O(h^4)$.

7.2.4.- Aproximación Cúbica con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$, $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ y $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 2 puntos gaussianos para construirlos. Se emplea integración por cuadratura con 3 puntos gaussianos. Se considera el parámetro $V = 20$. El orden de convergencia h del error para los métodos FEM-OF Trefftz-Herrera y FEM-OF Steklov-Poincaré con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ colocación es $O(h^4)$. Pero el orden de convergencia h del error para el método FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Omega = 3$ y colocación es $O(h^6)$. En la figura 7.4 se muestra la gráfica del error vs. h .

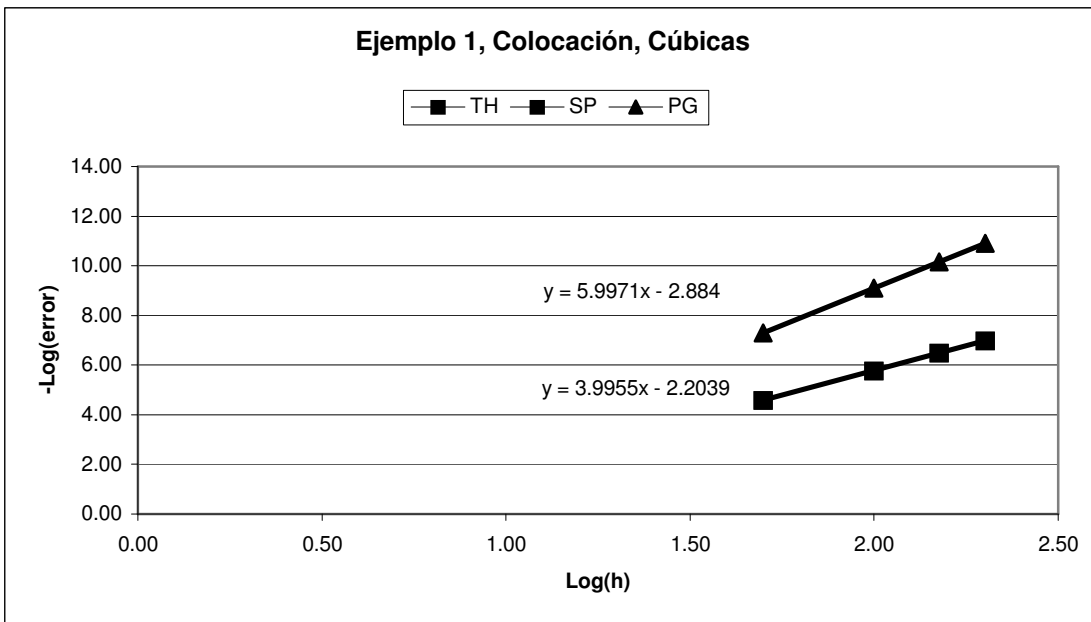


Figura 7.4.- Convergencia h del error para el caso no simétrico en una dimensión.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y colocación es $O(h^6)$.

Para FEM-OF Trefftz-Herrera y FEM-OF Steklov-Poincaré con aproximación cúbica y colocación es $O(h^4)$.

7.2.5.- Casos con Advección Dominante

Se analiza el comportamiento de la convergencia h del error del método FEM-OF Petrov-Galerkin contra la velocidad de advección V (casos con advección dominante), con aproximación tanto cuadrática $G_\Omega = 2$ como cúbica $G_\Omega = 3$ y FEM. Se observa que mientras mayor es la velocidad de advección V , menor es el orden de convergencia h para el error y mayor la magnitud del error. En las figuras 7.5 y 7.6 se muestra la gráfica de la convergencia h del error vs. el *Número de Peclet (Global)* [56]:

$$Pe_G = \frac{VL}{D} \quad (7.2.2)$$

En las figuras 7.7 y 7.8 se muestra la gráfica del error vs. h . En las figuras 7.9 y 7.10 se muestra las funciones de base y las funciones de peso para algunos casos. Al respecto obsérvese la asimetría de las funciones: mientras mayor es V , mayor es la asimetría.

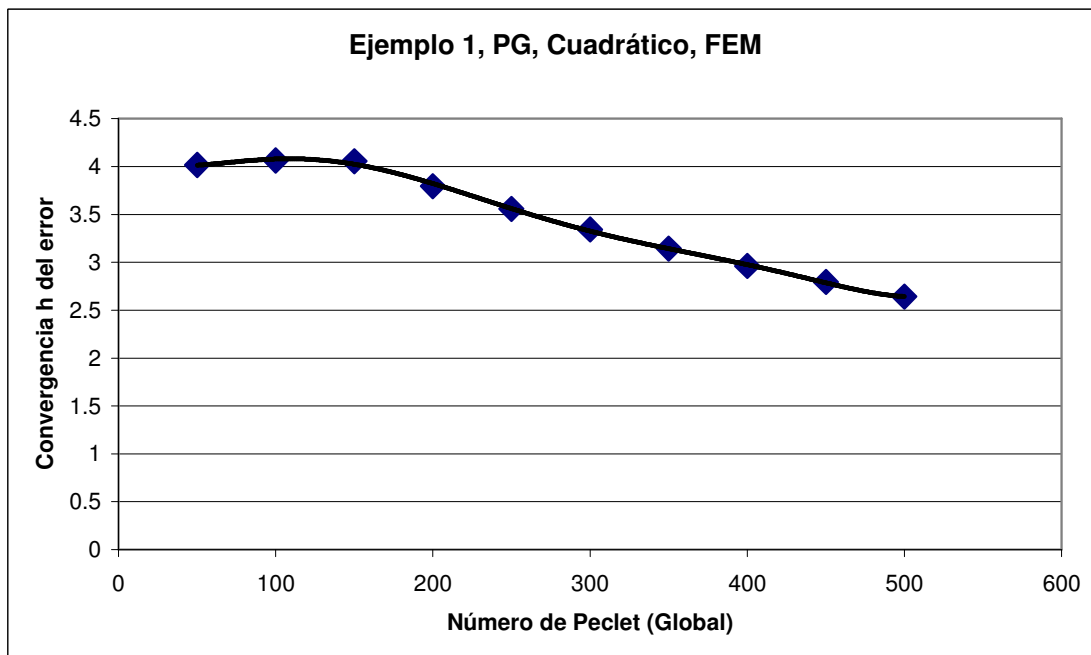


Figura 7.5.- Caso no simétrico en una dimensión. Convergencia h del error vs. Número de Peclet (Global) para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y FEM.

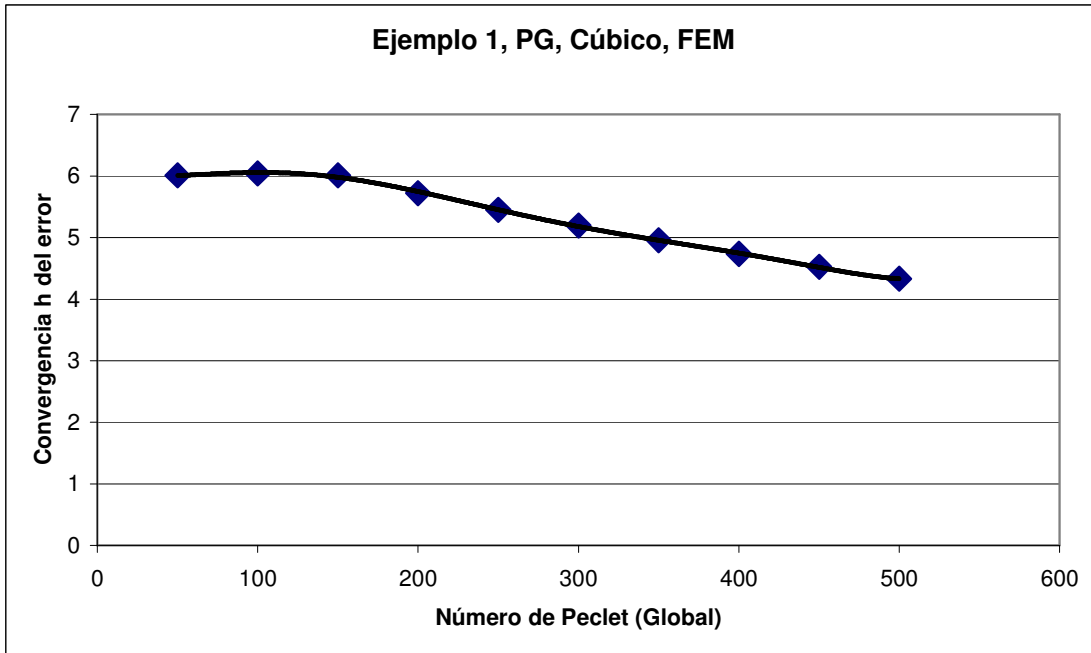


Figura 7.6.- Caso no simétrico en una dimensión. Convergencia h del error vs. Número de Peclet (Global) para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y FEM.

7.2.6.- Análisis de Resultados

- ◆ En las tablas 7.1, 7.2 y 7.3 se comparan los ordenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ◆ *FEM-OF Petrov-Galerkin* para el caso no simétrico en una dimensión exhibe propiedades de *superconvergencia*. Esta propiedad se presenta cuando se construyen las funciones óptimas aproximadas con FEM como con colocación.
- ◆ El orden de (super) convergencia h del error es $O(h^{2G_\Omega})$ donde G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k , en lugar del orden $O(h^{2(G_\Omega-1)})$ que se obtiene al aplicar el método directo de Steklov-Poincaré *convencional* con colocación o el método indirecto de Trefftz-Herrera *convencional* con colocación.

- ◆ Los tres métodos, **FEM-OF Trefftz-Herrera**, **FEM-OF Steklov-Poincaré** y **FEM-OF Petrov-Galerkin**, para el caso no simétrico en una dimensión exhiben propiedades de *superconvergencia* cuando se construye las funciones óptimas aproximadas con **FEM**.
- ◆ Los tres métodos, **FEM-OF Trefftz-Herrera**, **FEM-OF Steklov-Poincaré** y **FEM-OF Petrov-Galerkin**, para el caso no simétrico en una dimensión exhiben propiedades de *superconvergencia* cuando se construye las funciones óptimas aproximadas con **polinomios cuadráticos** $G_\Omega = 2$.
- ◆ Lo anterior se debe a que la aproximación cuadrática con FEM y la aproximación cuadrática con colocación resultan ser numéricamente iguales cuando se utiliza un punto gaussiano para determinar el único parámetro de las funciones de base o de peso.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w \mathcal{L} u dx = 0 \Leftrightarrow (x_{i+1} - x_i) w|_{x_G} \mathcal{L} u|_{x_G} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L} u|_{x_G} = 0 \quad (7.2.3)$$

- ◆ Los métodos **FEM-OF Trefftz-Herrera** y **FEM-OF Steklov-Poincaré** para el caso no simétrico en una dimensión no exhiben propiedades de *superconvergencia* cuando se construye las funciones óptimas aproximadas con polinomios cúbicos $G_\Omega = 3$ (ó de mayor grado) con colocación.
- ◆ Utilizando **FEM-OF Petrov-Galerkin**, se observa que mientras mayor es la velocidad de advección V , menor es el orden de convergencia h del error y mayor la magnitud del error.

Aproximación	TH Convencional (Colocación)	SP Convencional (Colocación)
Cuadráticas en Ω_k	$O(h^2)$	$O(h^2)$
Cúbicas en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$

Tabla 7.1. - Convergencia h del error en una dimensión para el caso no simétrico.

Caracterizaciones convencionales con colocación.

Aproximación	FEM-OF TH (Colocación)	FEM-OF SP (Colocación)	FEM-OF PG (Colocación)
Cuadráticas en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
Cúbicas en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$

Tabla 7.2. - Convergencia h del error en una dimensión para el caso no simétrico.

Caracterizaciones FEM-OF con colocación.

Aproximación	FEM-OF TH (FEM)	FEM-OF SP (FEM)	FEM-OF PG (FEM)
Cuadráticas en Ω_k	$O(h^4)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
Cúbicas en Ω_k	$O(h^6)$	$O(h^6)$	$O(h^6)$

Tabla 7.3. - Convergencia h del error en una dimensión para el caso no simétrico.

Caracterizaciones FEM-OF con FEM.

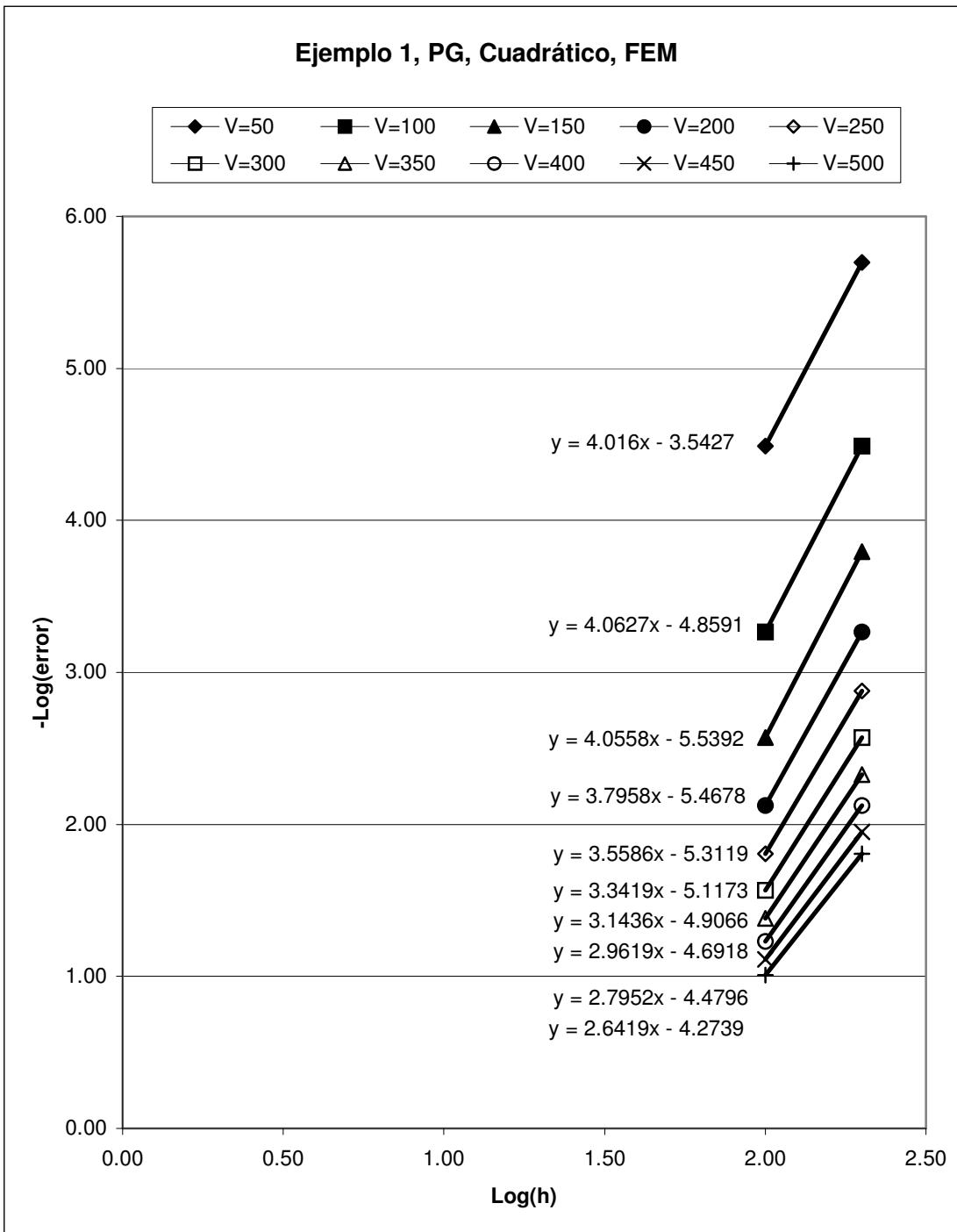


Figura 7.7. - Caso no simétrico en una dimensión. Convergencia h del error con respecto a la velocidad de advección V de FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cuadrática y FEM.

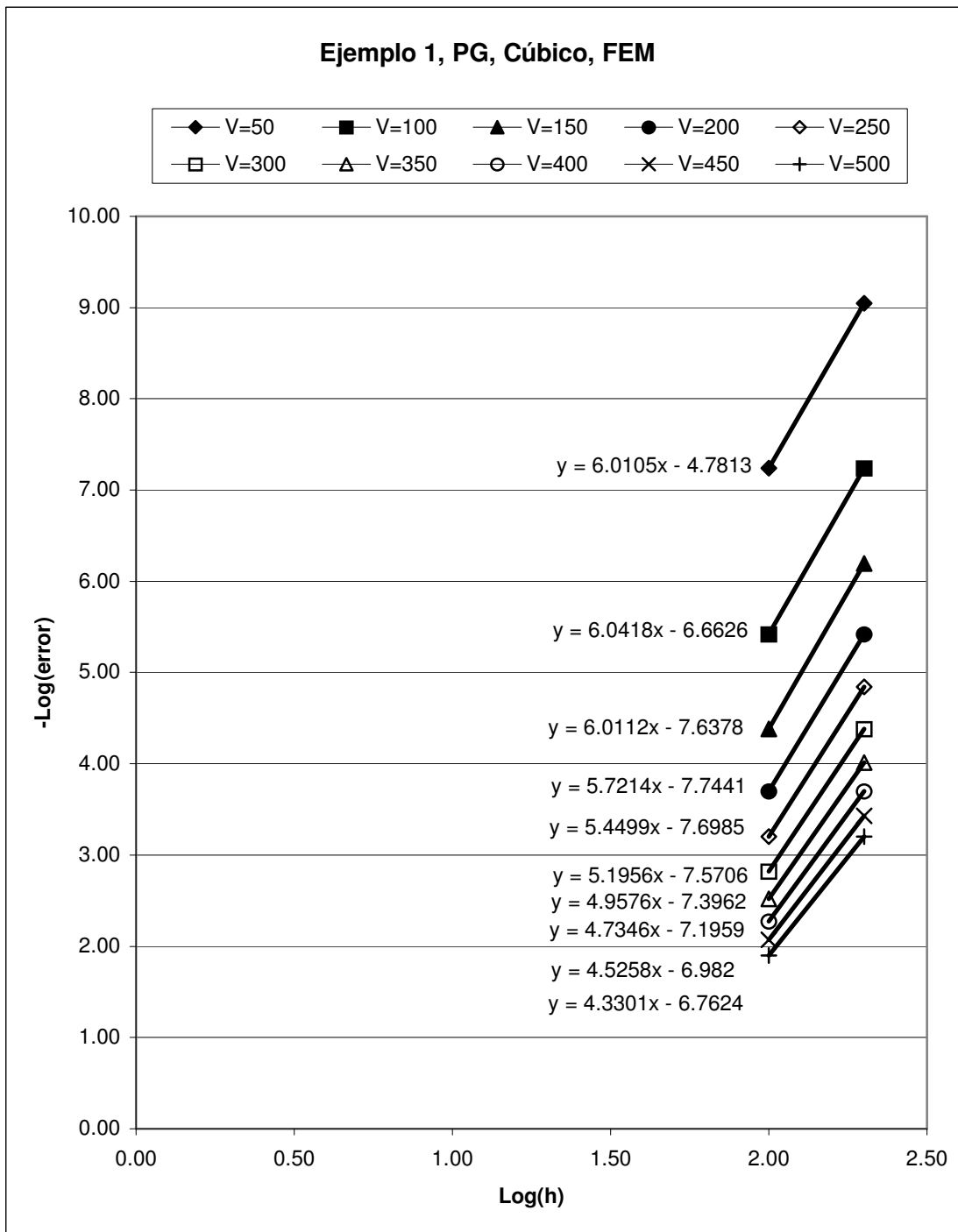


Figura 7.8. - Caso no simétrico en una dimensión. Convergencia h del error con respecto a la velocidad de advección V de FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica y FEM.

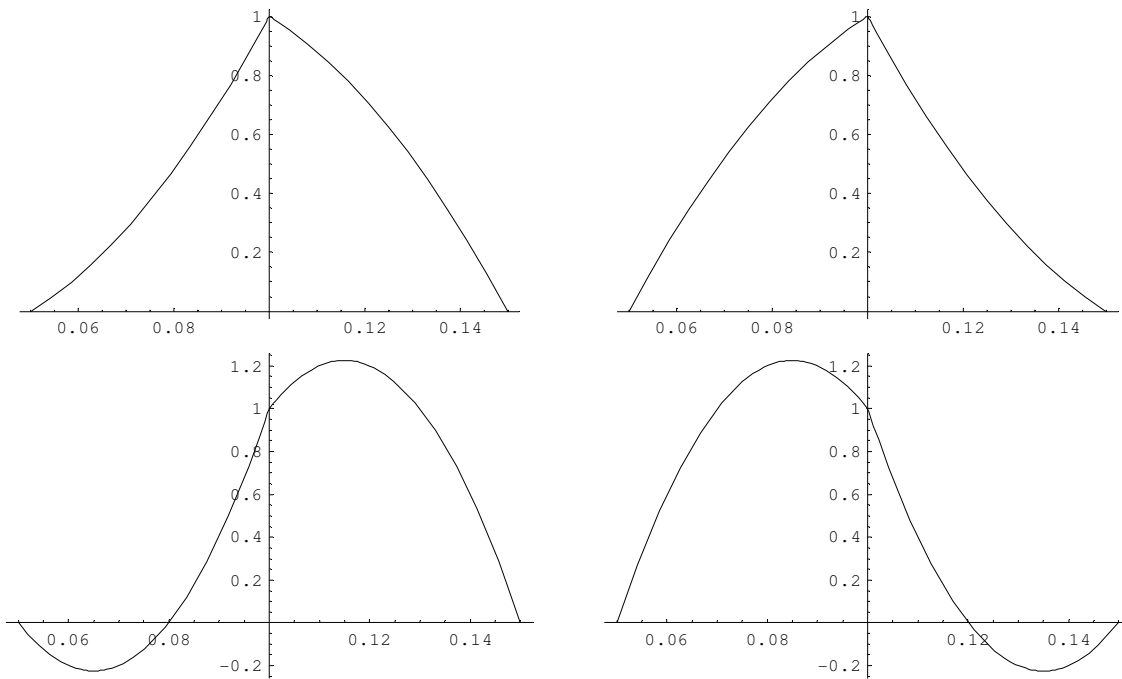


Figura 7.9.- Funciones de base -izquierda- y funciones de peso -derecha- con aproximación cuadrática para $V = 20$ -arriba- y $V = 100$ -abajo-.

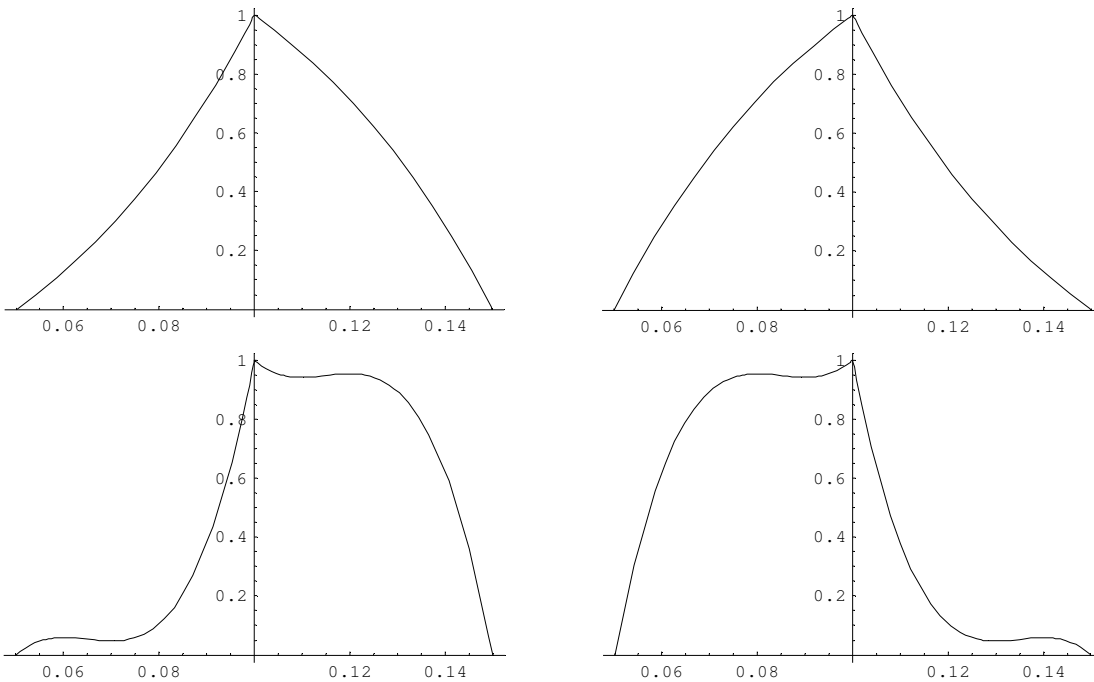


Figura 7.10.- Funciones de base -izquierda- y funciones de peso -derecha- con aproximación cúbica para $V = 20$ -arriba- y $V = 100$ -abajo-.

7.3.- Resultados en Dos Dimensiones

Sea la ecuación diferencial elíptica parcial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + V_x \frac{\partial u}{\partial x} + V_y \frac{\partial u}{\partial y} + u = f_\Omega \quad (7.3.1)$$

en $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, sujeta a las condiciones de frontera homogéneas $u(0,y) = 0$, $u(1,y) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u(x,1) = 0$, y con solución totalmente continua $u \in C^1(\Omega)$ (lo cual implica que las condiciones de saltos prescritos son nulas). La solución analítica es: $u(x,y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$.

Se introduce una partición rectangular uniforme de $E_x E_y$ subdominios $\Pi = \{(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \mid i=1, \dots, E_x; j=1, \dots, E_y\}$, donde $x_i = i/E_x$ para $i=0, \dots, E_x$ e $y_j = j/E_y$ para $j=0, \dots, E_y$. Los nodos interiores de la frontera interior Σ son $\{(x_i, y_j) \mid i=1, \dots, E_x - 1; j=1, \dots, E_y - 1\}$.

Se trabajarán cuatro **algoritmos**. Primero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Segundo, igual que el primer algoritmo pero utilizando colocación para la construcción de las funciones óptimas. Tercero, se aproximarán las funciones óptimas con polinomios cúbicos por tramos en la

frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k , utilizando FEM para su construcción. Cuarto, igual que el tercer algoritmo pero utilizando colocación para la construcción de las funciones óptimas.

La aproximación con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k fue planteada en (6.4.2)-(6.4.5). La aproximación con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio Ω_k fue planteada en (6.4.6)-(6.4.9).

7.3.1.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con 1 función de ponderación local para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se considera el parámetro $|\underline{V}| = 20$ con $\angle(\underline{V}) = 45^\circ$. Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$. En la figura 7.11 se muestra la gráfica del error vs. h .

7.3.2.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cuadrática en Ω_k con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cuadráticos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 1×1 punto gaussiano para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se considera el parámetro $|\underline{V}| = 20$

con $\angle(V) = 45^\circ$. Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y colocación es $O(h^{2.4})$. En la figura 7.11 se muestra la gráfica del error vs. h .

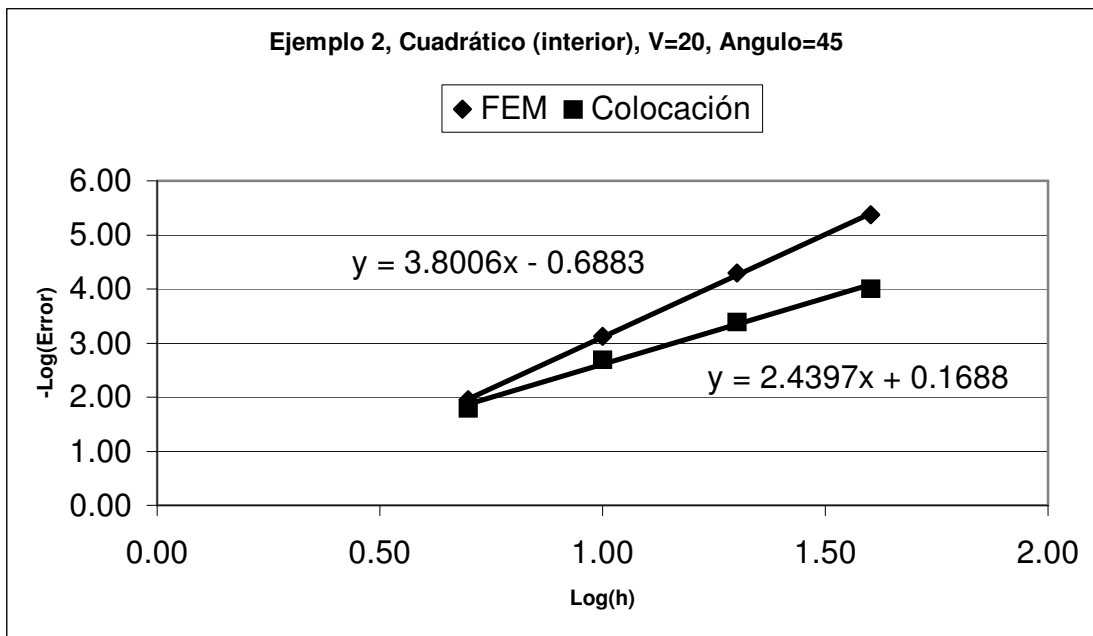


Figura 7.11.- Convergencia h del error para el caso no simétrico en dos dimensiones.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y colocación es $O(h^{2.4})$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ ,

bi-cuadrática en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$.

7.3.3.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con FEM

Las funciones $\tilde{v} \in \tilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \tilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza FEM con

4 funciones de ponderación locales para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se considera el parámetro $|V| = 20$ con $\angle(V) = 45^\circ$. Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$. En la figura 7.12 se muestra la gráfica del error vs. h .

7.3.4.- Aproximación Cúbica en Σ y Bi-cúbica en Ω_k con Colocación

Las funciones $\tilde{v} \in \widetilde{O}_B$ y $\tilde{w} \in \widetilde{O}_T$ se aproximan con polinomios cúbicos por tramos en la frontera interior Σ y con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k y se utiliza colocación con 2×2 puntos gaussianos para construir las. La función $u_p \in \widehat{D}_1(\Omega)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos por tramos en cada subdominio Ω_k . Se considera el parámetro $|V| = 20$ con $\angle(V) = 45^\circ$. Se utiliza integración por cuadratura con 3×3 puntos gaussianos. El orden de convergencia h del error para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cúbica $G_\Omega = 3$ en Ω_k y colocación es $O(h^{3.8})$. En la figura 7.12 se muestra la gráfica del error vs. h .

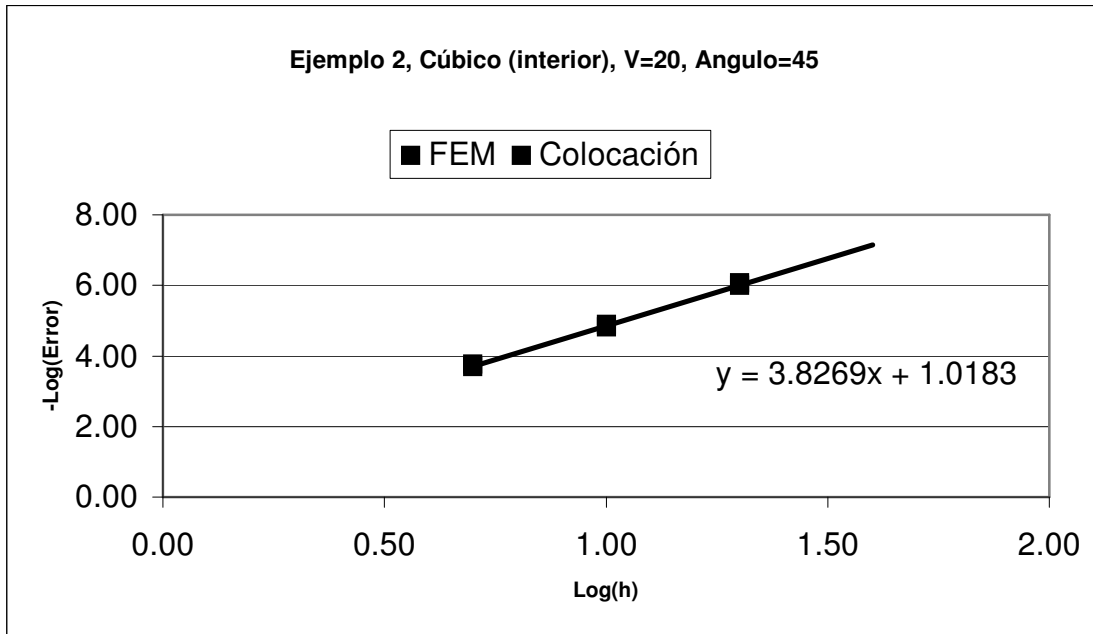


Figura 7.12. - Convergencia h del error para el caso no simétrico en dos dimensiones.

Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cúbica en Ω_k y colocación es $O(h^{3.8})$. Para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cúbica en Ω_k y FEM es $O(h^{3.8})$.

7.3.5. - Casos con Advección Dominante

Se analiza el comportamiento de la convergencia h del error del método FEM-OF Petrov-Galerkin contra la velocidad de advección \underline{V} (casos con advección dominante), con aproximación cúbica $G_\Sigma = 3$ en Σ , bi-cuadrática $G_\Omega = 2$ en Ω_k y FEM. Se observa que mientras mayor es la velocidad de advección \underline{V} , menor es el orden de convergencia h del error y mayor la magnitud del error. En la figura 7.13 se muestra la gráfica de la convergencia h del error vs. el Número de Peclet (Global).

En la figura 7.14 se muestra la gráfica del error vs. h . En la figura 7.15 se muestra las funciones de base y de peso para algunos casos. Al respecto, obsérvese que la asimetría de las funciones se orienta en la dirección de la velocidad de advección \underline{V} .

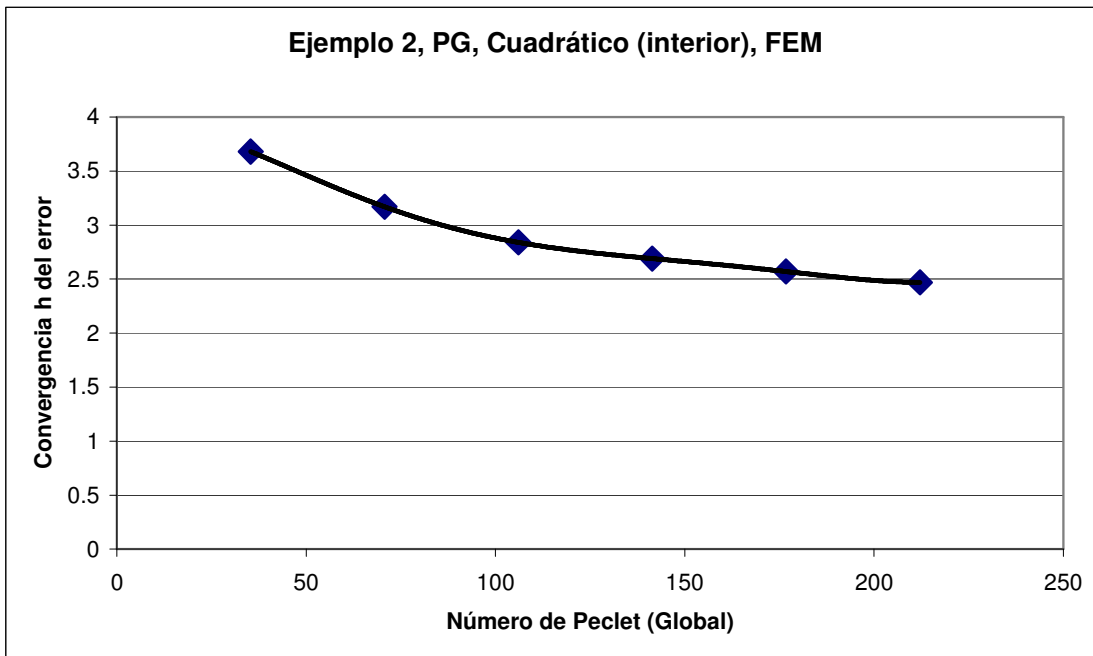


Figura 7.13. - Caso no simétrico en dos dimensiones. Convergencia h del error vs. Número de Peclet (Global) para FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y FEM.

7.3.6. - Análisis de Resultados

- ♦ En las tablas 7.4 y 7.5 se comparan los órdenes de convergencia h del error que se obtienen en cada algoritmo.
- ♦ *FEM-OF Petrov-Galerkin* para el caso no simétrico en dos dimensiones exhibe propiedades de *superconvergencia*. Esta propiedad se presenta cuando se construyen las funciones óptimas aproximadas con *FEM*. Pero no se presenta cuando se construyen las funciones óptimas aproximadas con colocación.

- ♦ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con FEM, el orden de (super) convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2G_\Omega\})$ donde G_Σ es el grado de los polinomios en Σ y G_Ω es el grado de los polinomios en Ω_k .
- ♦ Si se construyen las funciones óptimas aproximadas con colocación, el orden de convergencia h del error es $O(\min\{G_\Sigma + 1, 2(G_\Omega - 1)\})$.
- ♦ Utilizando FEM-OF Petrov-Galerkin, se observa que mientras mayor es la velocidad de advección V , menor es el orden de convergencia h del error y mayor la magnitud del error.

Aproximación	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cúbica en Σ y bi-cuadrática en Ω_k	$O(h^{2.4})$	$O(h^{3.8})$

Tabla 7.4. - Convergencia h del error en dos dimensiones para el caso no simétrico.

Aproximación	TH Convencional (Colocación)	SP Convencional (Colocación)	FEM-OF PG (Colocación)	FEM-OF PG (FEM)
Cúbica en Σ y bi-cúbica en Ω_k	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.8})$	$O(h^{3.8})$

Tabla 7.5. - Convergencia h del error en dos dimensiones para el caso no simétrico.

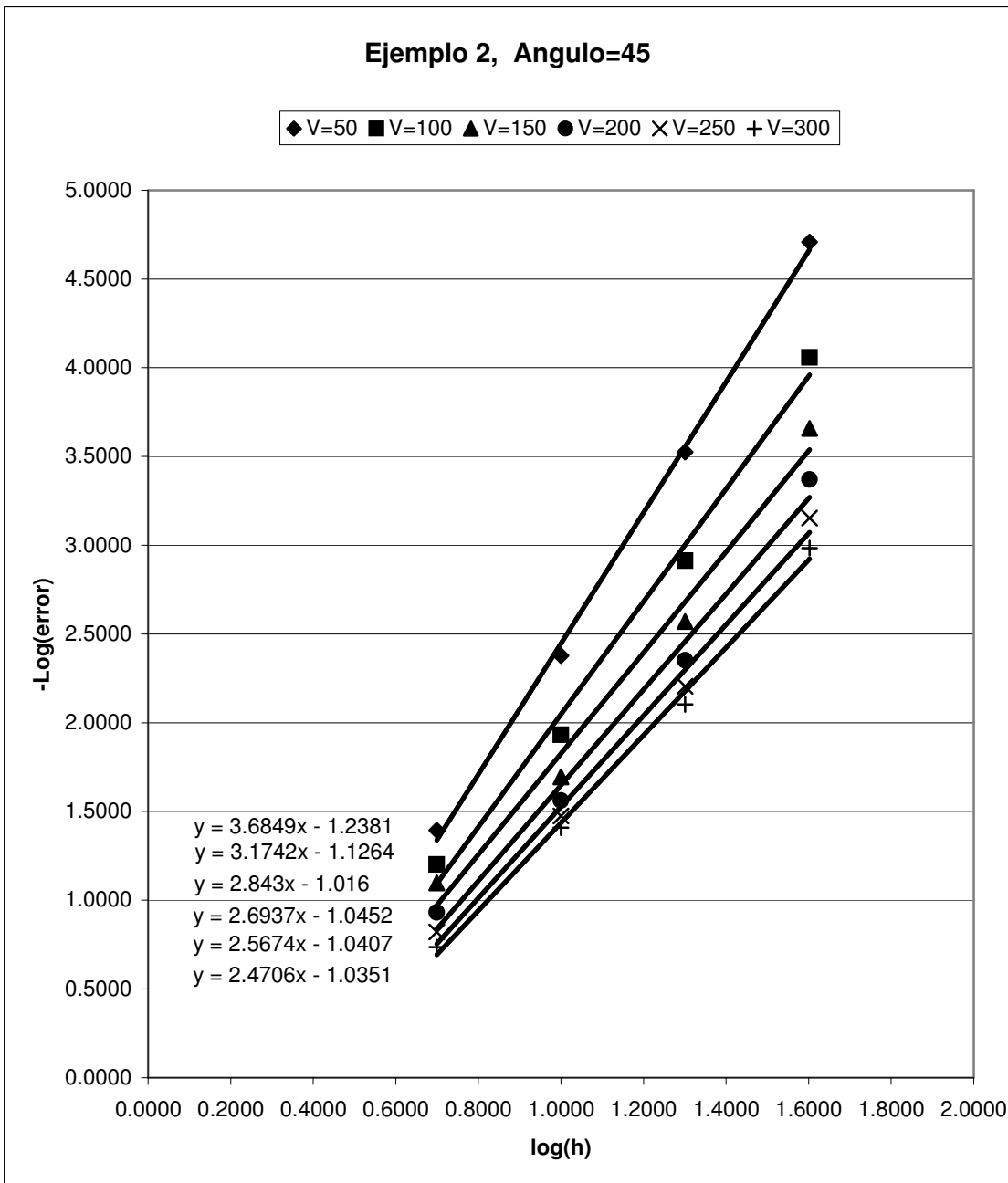


Figura 7.14. - Caso no simétrico en dos dimensiones. Convergencia h del error con respecto a la velocidad de advección V de FEM-OF Petrov-Galerkin con aproximación cúbica en Σ , bi-cuadrática en Ω_k y FEM.

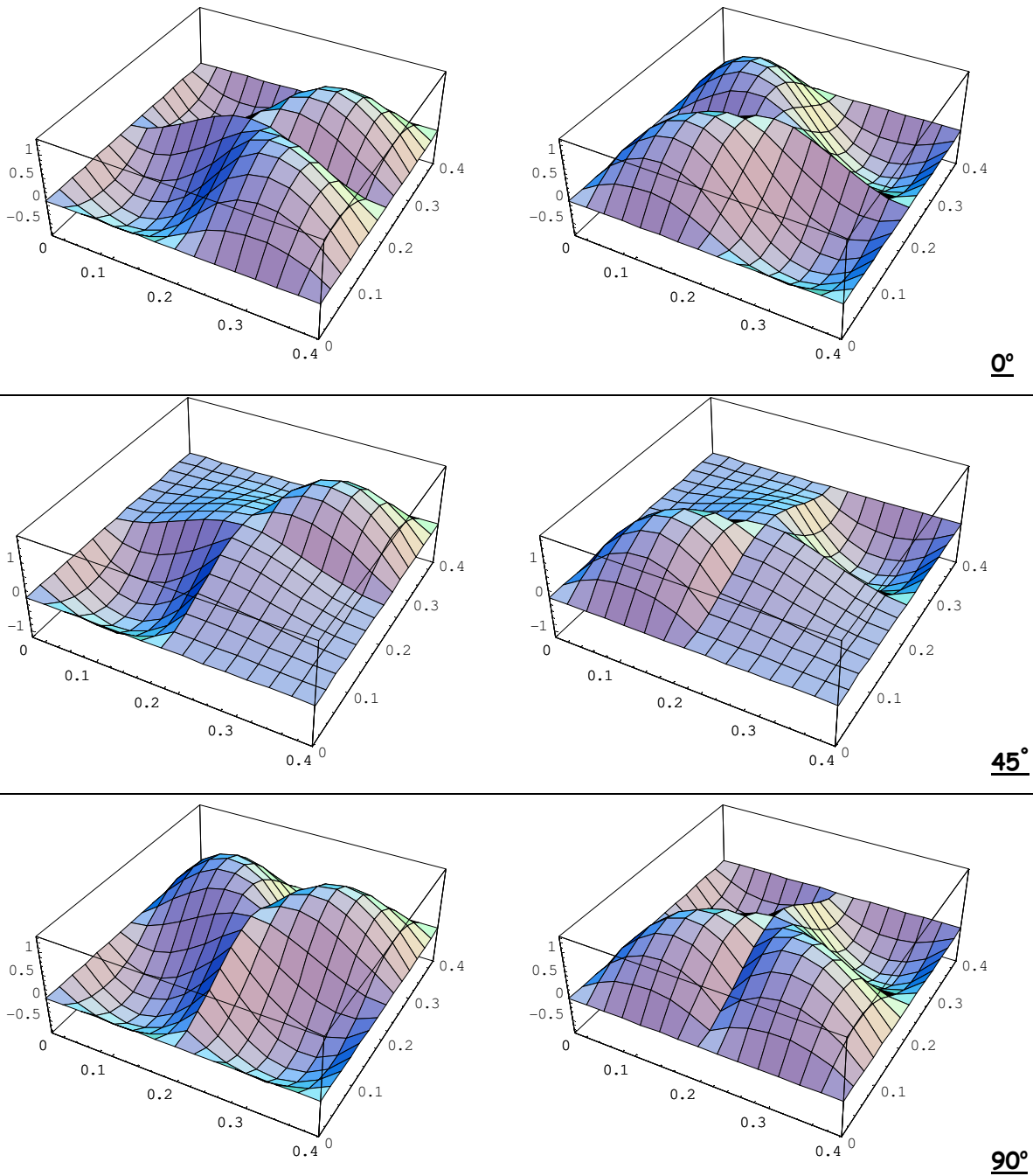


Figura 7.15. - Funciones de base -izquierda- y funciones de peso -derecha- con aproximación cúbica en Σ y bi-cuadrática en Ω_k para $|\underline{V}| = 100$ con ángulos de $\angle(\underline{V}) = 0^\circ$ -primer renglón-, $\angle(\underline{V}) = 45^\circ$ -segundo renglón- y $\angle(\underline{V}) = 90^\circ$ -tercer renglón-.

