

A.- Implementación de Funciones Óptimas en 2 Dimensiones

Sea la ecuación diferencial parcial elíptica [50, 51, 76]:

$$L u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_{\Omega} \quad (\text{A.1})$$

en un dominio Ω con una partición Π , sujeto a condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas $u = 0$ en $\partial\Omega$, y con condiciones de salto nulos $[u] = [\underline{a}_n \cdot \nabla u] = 0$ en Σ , es decir, se trata de un problema con solución continua y primeras derivadas continuas a través de Σ . Se analizará el caso bidimensional.

La ecuación diferencial parcial elíptica en dos dimensiones en coordenadas cartesianas es:

$$L u \equiv -a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(b_1 - \frac{\partial a_{11}}{\partial x} - \frac{\partial a_{21}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(b_2 - \frac{\partial a_{21}}{\partial x} - \frac{\partial a_{22}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(c + \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} \right) u = f_{\Omega} \quad (\text{A.2})$$

Por otro lado, el operador diferencial adjunto general es:

$$L^* w \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) - \underline{b} \cdot \nabla w + cw \quad (\text{A.3})$$

y para dos dimensiones en coordenadas cartesianas es:

$$L^* w \equiv -a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - a_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(-b_1 - \frac{\partial a_{11}}{\partial x} - \frac{\partial a_{21}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(-b_2 - \frac{\partial a_{21}}{\partial x} - \frac{\partial a_{22}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + cw \quad (\text{A.4})$$

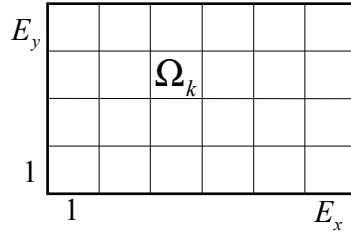


Figura A.1.- Dominio rectangular Ω y partición rectangular uniforme Π .

Sea un dominio rectangular $\Omega = [x_0, x_E] \times [y_0, y_E]$, con una partición rectangular uniforme $\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_M\}$ con $M = E_x E_y$ subdominios. De esta forma $\Delta x = (x_E - x_0)/E_x$ e $\Delta y = (y_E - y_0)/E_y$, y los nodos (x_i, y_j) tiene coordenadas $x_i = x_0 + i\Delta x$ para $i = 0, \dots, E_x$ e $y_j = y_0 + j\Delta y$ para $j = 0, \dots, E_y$. La partición es inducida por la colección de rectas $x = x_i$ e $y = y_j$, la cual conforma la frontera interior Σ . Véase la figura A.1.

A.1.- Aproximación de la función u_p

Primeramente, nótese que la función $u_p(x, y)$ no pertenece al espacio vectorial de funciones óptimas de base. La función $u_p(x, y)$ se construye con polinomios bi-cúbicos por tramos en el interior de cada subdominio $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x$, $j = 1, \dots, E_y$. Esto es:

$$u_p(x, y) = C_{ij}^1 H_{i-1}^1(x) H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^2 H_{i-1}^1(x) H_j^1(y) + C_{ij}^3 H_i^1(x) H_{j-1}^1(y) + C_{ij}^4 H_i^1(x) H_j^1(y) \quad (\text{A.5})$$

donde $H_i^0(\bullet)$ y $H_i^1(\bullet)$ son polinomios cúbicos de Hermite apropiadamente escalados en $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y C_{ij}^k son parámetros que se calculan apropiadamente de modo que $u_p(x, y)$ satisfaga la ecuación diferencial no homogénea por separado en cada subdominio Ω_k . Véase las figuras A.2 y A.3.

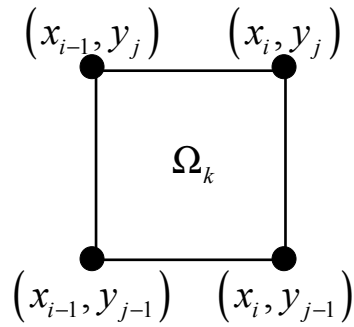


Figura A.2.- Subdominio $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

A.1.1. - Construcción de u_p con Colocación

Cuando se construye la función $u_p(x, y)$ con colocación, ésta debe satisfacer la ecuación diferencial no homogénea *solamente* en los puntos gaussianos en cada uno de los subdominios $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x$, $j = 1, \dots, E_y$. Puesto que $u_p(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos, se requiere de 2×2 puntos gaussianos en cada subdominio Ω_k . Entonces se tiene que:

$$L u_p|_{(x^g, y^g)} = f_{\Omega}|_{(x^g, y^g)} \quad (\text{A.6})$$

donde (x^g, y^g) significa cada uno de los puntos (x^*, y^*) , (x^*, y^{**}) , (x^{**}, y^*) , (x^{**}, y^{**}) , donde a su vez $x^* = x_i - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) (x_i - x_{i-1})$ e $x^{**} = x_i - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) (x_i - x_{i-1})$ son los puntos gaussianos del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) (y_j - y_{j-1})$ e $y^{**} = y_j - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) (y_j - y_{j-1})$ son los puntos gaussianos del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas C_{ij}^1 , C_{ij}^2 , C_{ij}^3 , C_{ij}^4 en cada subdominio Ω_k .

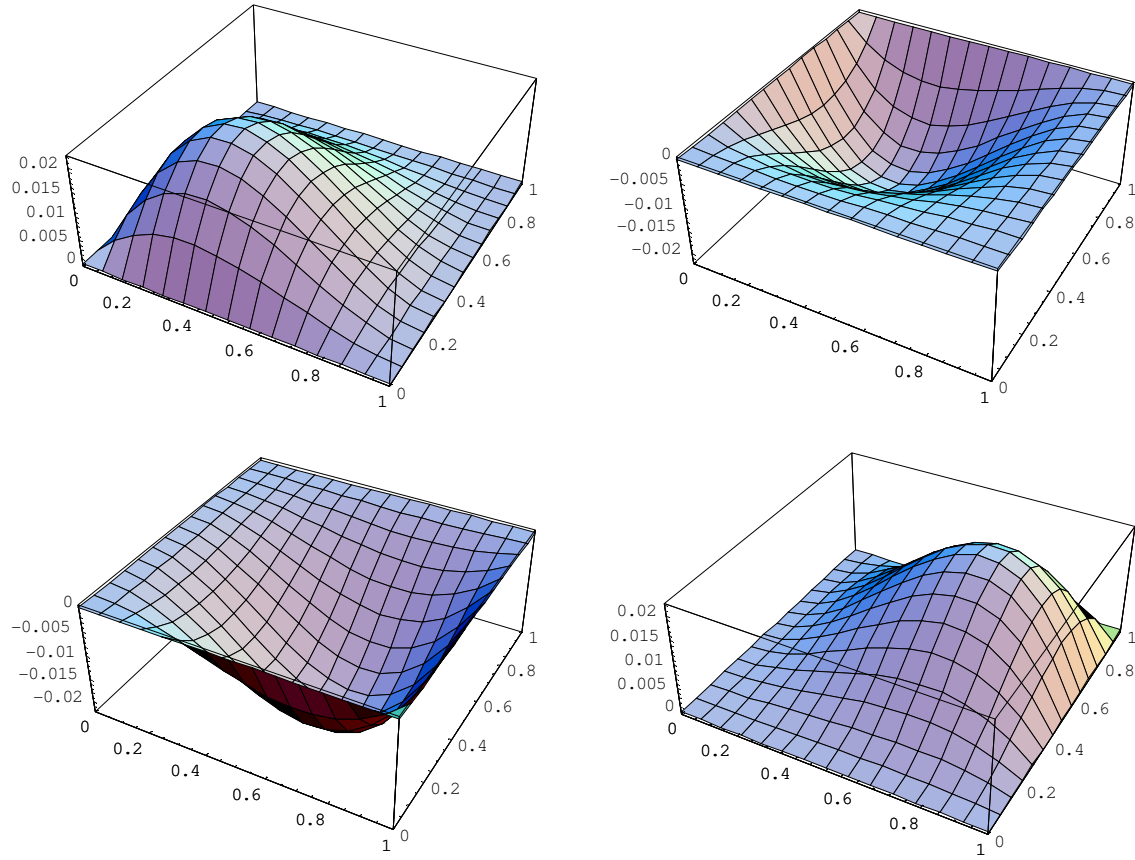


Figura A.3.- Polinomios bi-cúbicos de Hermite $H_0^1(x)H_0^1(y)$ -arriba, izquierda-,

$H_1^1(x)H_0^1(y)$ -arriba, derecha-, $H_0^1(x)H_1^1(y)$ -abajo, izquierda-,

$H_1^1(x)H_1^1(y)$ -abajo, derecha- en el dominio $[0,1] \times [0,1]$.

A.1.2. - Construcción de u_p con FEM

Cuando se construye la función $u_p(x, y)$ con FEM, ésta debe satisfacer la integral de la ecuación diferencial no homogénea ponderada con las funciones de peso locales en cada subdominio $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Puesto que $u_p(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cúbicos, se requiere de 4 funciones de peso locales en cada subdominio Ω_k .

Primero, sean las funciones de peso locales en cada subdominio $\Omega_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ para

$i = 1, \dots, E_x, j = 1, \dots, E_y$;

$$W_{ij}^1 = H_{i-1}^1(x)H_{j-1}^1(y) \quad (\text{A.7})$$

$$W_{ij}^2 = H_{i-1}^1(x)H_j^1(y) \quad (\text{A.8})$$

$$W_{ij}^3 = H_i^1(x)H_{j-1}^1(y) \quad (\text{A.9})$$

$$W_{ij}^4 = H_i^1(x)H_j^1(y) \quad (\text{A.10})$$

Véase la figura A.3.

Segundo, la función $u_p(x, y)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$A\langle u_p, W_{ij}^q \rangle = \langle f_\Omega, W_{ij}^q \rangle \quad (\text{A.11})$$

con $q=1,2,3,4$, donde el operador $A\langle u, W \rangle$ se define como $\langle Pu, W \rangle = \int L u W d\underline{x}$ pero integrado por partes, es decir:

$$A\langle u_p, W_{ij}^q \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (\nabla u_p \bullet \underline{a} \bullet \nabla W_{ij}^q - u_p \underline{b} \bullet \nabla W_{ij}^q + c u_p W_{ij}^q) dy dx \quad (\text{A.12})$$

junto con:

$$\langle f_\Omega, W_{ij}^q \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f_\Omega W_{ij}^q dy dx \quad (\text{A.13})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas $C_{ij}^1, C_{ij}^2, C_{ij}^3, C_{ij}^4$ en cada subdominio Ω_k .

A.2.- Aproximación de las funciones óptimas de base

Las funciones de base $v_{ij}(x, y)$ se construyen con polinomios bi-cúbicos por tramos en Σ y polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio $\Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$, para $i=1, \dots, E_x - 1, j=1, \dots, E_y - 1$. En consecuencia, existen tres tipos de funciones óptimas de base: las que aproximan el valor de función en $\Sigma, v_{ij}^0(x, y)$; las que aproximan el valor de la primera derivada parcial de la función

con respecto a x en Σ , $v_{ij}^1(x, y)$; y las que aproximan la primera derivada parcial de la función con respecto a y en Σ , $v_{ij}^2(x, y)$. Esto es:

$$v_{ij}^0(x, y) = \begin{cases} v_{ij}^{01}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{01}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{02}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{02}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{03}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{03}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ v_{ij}^{04}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{04}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$v_{ij}^1(x, y) = \begin{cases} v_{ij}^{11}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{11}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{12}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{12}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{13}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{13}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ v_{ij}^{14}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{14}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$v_{ij}^2(x, y) = \begin{cases} v_{ij}^{21}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{21}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{22}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{22}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ v_{ij}^{23}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{23}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ v_{ij}^{24}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{24}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

donde $H_i^0(\bullet)$ y $H_i^1(\bullet)$ son polinomios cúbicos de Hermite y $L_i(\bullet)$ son polinomios lineales de Lagrange, ambos apropiadamente escalados en $[x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$, y C_{ij}^{mn} son parámetros que se calculan apropiadamente de modo que $v_{ij}^m(x, y)$ satisfaga la ecuación diferencial homogénea por separado en cada subdominio Ω_k . Véase las figuras A.4, A.5 y A.6.

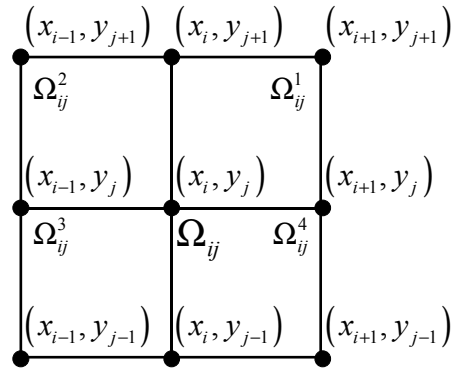


Figura A.4.- Subdominio $\Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$

A.2.1. - Construcción de $v_{ij}(x, y)$ con colocación

Cuando se construye la función $v_{ij}^m(x, y)$ con colocación, ésta debe satisfacer a la ecuación diferencial homogénea **solamente** en los puntos gaussianos en cada uno de los subdominios $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Puesto que $v_{ij}(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cuadráticos en el interior Ω_{ij}^n , se requiere de 1×1 punto gaussiano en cada subdominio Ω_{ij}^n .

Entonces, para $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene:

$$L v_{ij}^{m1} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.17})$$

donde $x^* = x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que $y^* = y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_j, y_{j+1}]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m1} en cada subdominio Ω_{ij}^1 .

Para $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene:

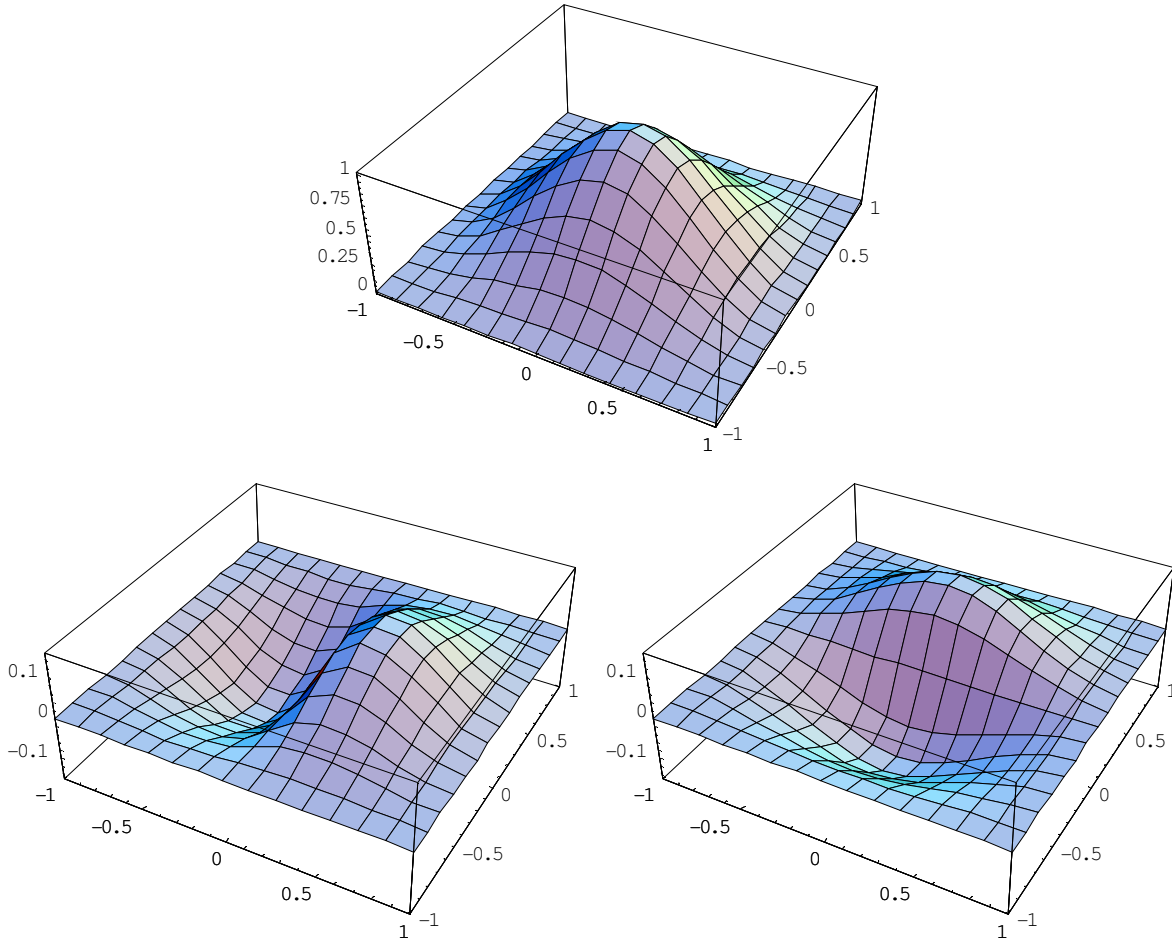


Figura A.5.- Polinomio bi-cúbicos de Hermite $H_0^0(x)H_0^0(y)$ asociado con $v_{ij}^0(x,y)$ -arriba-, $H_0^1(x)H_0^0(y)$ asociado con $v_{ij}^1(x,y)$ -abajo, izquierda-, $H_0^0(x)H_0^1(y)$ asociado con $v_{ij}^2(x,y)$ -abajo, izquierda- en el dominio $[-1,1] \times [-1,1]$.

$$L v_{ij}^{m2} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \tag{A.18}$$

donde $x^* = x_i - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; mientras que $y^* = y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_j, y_{j+1}]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m2} en cada subdominio Ω_{ij}^2 .

Para $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene:

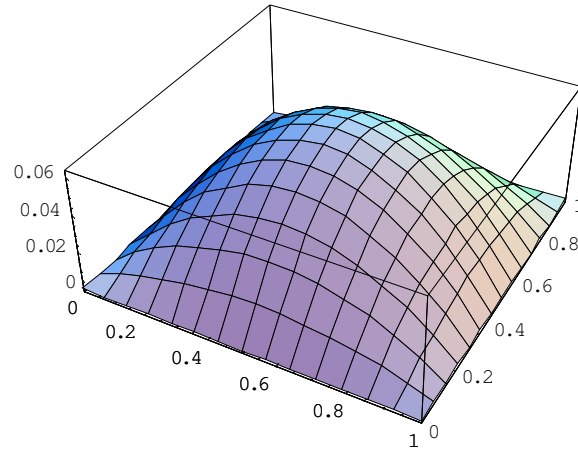


Figura A.6.- Polinomio bi-cuadrático $L_0(x)L_1(x)L_0(y)L_1(y)$ en el dominio $[0,1] \times [0,1]$.

$$L v_{ij}^{m3} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.19})$$

donde $x^* = x_i - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m3} en cada subdominio Ω_{ij}^3 .

Para $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene:

$$L v_{ij}^{m4} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.20})$$

donde $x^* = x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m4} en cada subdominio Ω_{ij}^4 .

A.2.2. - Construcción de $v_{ij}(x, y)$ con FEM

Cuando se construye la función $v_{ij}^m(x, y)$ con FEM, ésta debe satisfacer la integral de la ecuación diferencial homogénea ponderada con las funciones de peso locales en cada

subdominio $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Puesto que $v_{ij}^m(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cuadráticos en el interior Ω_{ij}^n , se requiere de una función de peso local en cada subdominio Ω_{ij}^n .

Entonces para $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^1 = L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) \quad (\text{A.21})$$

Véase la figura A.6. Ahora, la función $v_{ij}^{m1}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A \langle v_{ij}^{m1}, W_{ij}^1 \rangle = 0 \quad (\text{A.22})$$

donde $A \langle v, W \rangle$ se define como $\langle Pu, W \rangle = \int L u W dx$ integrado por partes, es decir:

$$A \langle v_{ij}^{m1}, W_{ij}^1 \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (\nabla v_{ij}^{m1} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla W_{ij}^1 - v_{ij}^{m1} \underline{\underline{b}} \cdot \nabla W_{ij}^1 + c v_{ij}^{m1} W_{ij}^1) dy dx \quad (\text{A.23})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m1} en cada subdominio Ω_{ij}^1 .

Para $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^2 = L_i(x)L_{i-1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) \quad (\text{A.24})$$

Ahora, la función $v_{ij}^{m2}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A \langle v_{ij}^{m2}, W_{ij}^2 \rangle = 0 \quad (\text{A.25})$$

donde:

$$A \langle v_{ij}^{m2}, W_{ij}^2 \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (\nabla v_{ij}^{m2} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \nabla W_{ij}^2 - v_{ij}^{m2} \underline{\underline{b}} \cdot \nabla W_{ij}^2 + c v_{ij}^{m2} W_{ij}^2) dy dx \quad (\text{A.26})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m2} en cada subdominio Ω_{ij}^2 .

Para $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^3 = L_i(x)L_{i-1}(x)L_j(y)L_{j-1}(y) \quad (\text{A.27})$$

Ahora, la función $v_{ij}^{m3}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A \langle v_{ij}^{m3}, W_{ij}^3 \rangle = 0 \quad (\text{A.28})$$

donde:

$$A \langle v_{ij}^{m3}, W_{ij}^3 \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (\nabla v_{ij}^{m3} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla W_{ij}^3 - v_{ij}^{m3} \underline{\underline{b}} \bullet \nabla W_{ij}^3 + c v_{ij}^{m3} W_{ij}^3) dy dx \quad (\text{A.29})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m3} en cada subdominio Ω_{ij}^3 .

Para $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^4 = L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j-1}(y) \quad (\text{A.30})$$

Ahora, la función $v_{ij}^{m4}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A \langle v_{ij}^{m4}, W_{ij}^4 \rangle = 0 \quad (\text{A.31})$$

donde:

$$A \langle v_{ij}^{m4}, W_{ij}^4 \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (\nabla v_{ij}^{m4} \bullet \underline{\underline{a}} \bullet \nabla W_{ij}^4 - v_{ij}^{m4} \underline{\underline{b}} \bullet \nabla W_{ij}^4 + c v_{ij}^{m4} W_{ij}^4) dy dx \quad (\text{A.32})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m4} en cada subdominio Ω_{ij}^4 .

A.2.3. - Casos espaciales: nodos en la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos que se encuentran sobre $\Sigma \cap \partial\Omega$ tienen asociada solamente una función de base, en lugar de las tres funciones de base que tienen asociadas los nodos que se encuentran en el interior de Ω . Esto se debe a que, como se trata de un BVPJ elíptico con condiciones de frontera tipo Dirichlet, el valor de la función es conocido en la frontera exterior $\partial\Omega$. También se puede conocer directamente alguna de las primeras derivadas parciales de la función (con respecto a x o con respecto a y). Solamente se desconoce la otra primera derivada parcial de la función. Esto se detalla a continuación.

A.2.3.1. - Nodos en el segmento $x = x_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $x = x_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_0, y_j) con $j = 1, \dots, E_y - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $v_{0j}^1(x, y)$, la que aproxima la primera derivada parcial de la función con respecto a x , ya que se conoce el valor de la función y el de su primera derivada parcial con respecto a y . Pero solamente se trabaja con una parte de $v_{0j}^1(x, y)$, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{0j}^1 y Ω_{0j}^4 , es decir, $\Omega_{0j} = [x_0, x_1] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$. Véase la figura A.7.

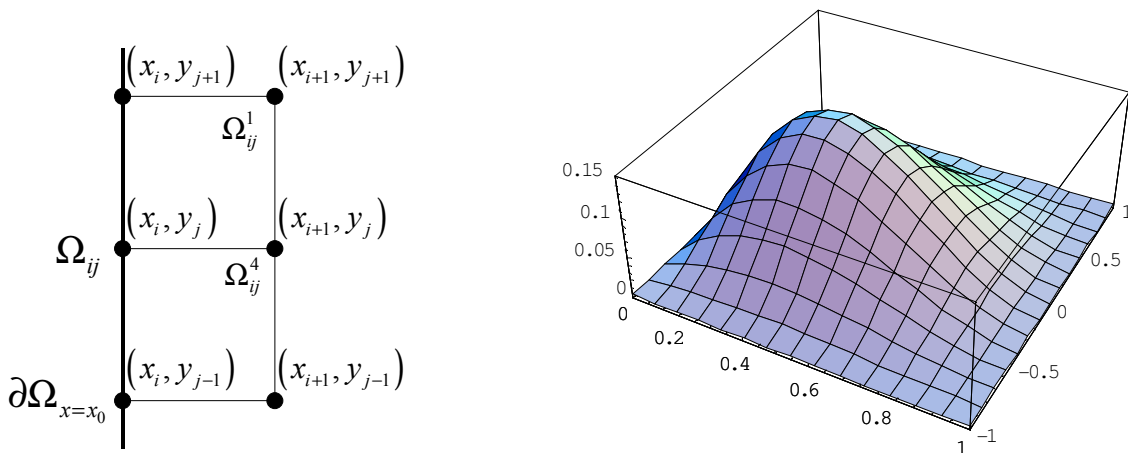


Figura A.7.- Subdominio $\Omega_{0j} = [x_0, x_1] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$ -izquierda- y la función de base $v_{0j}^1(x, y)$ asociada en $\partial\Omega_{x=x_0}$ -derecha-.

A.2.3.2. - Nodos en el segmento $x = x_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $x = x_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_E, y_j) con $j = 1, \dots, E_y - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $v_{E_x j}^1(x, y)$, la que aproxima la primera derivada parcial de la función con respecto a x , ya que se conoce el valor de la función y el de su primera derivada parcial con respecto a y . Pero solamente se trabaja con una parte de $v_{E_x j}^1(x, y)$, la que se encuentra ubicada en los subdominios $\Omega_{E_x j}^2$ y $\Omega_{E_x j}^3$, es decir, $\Omega_{E_x j} = [x_{E-1}, x_E] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$. Véase la figura A.8.

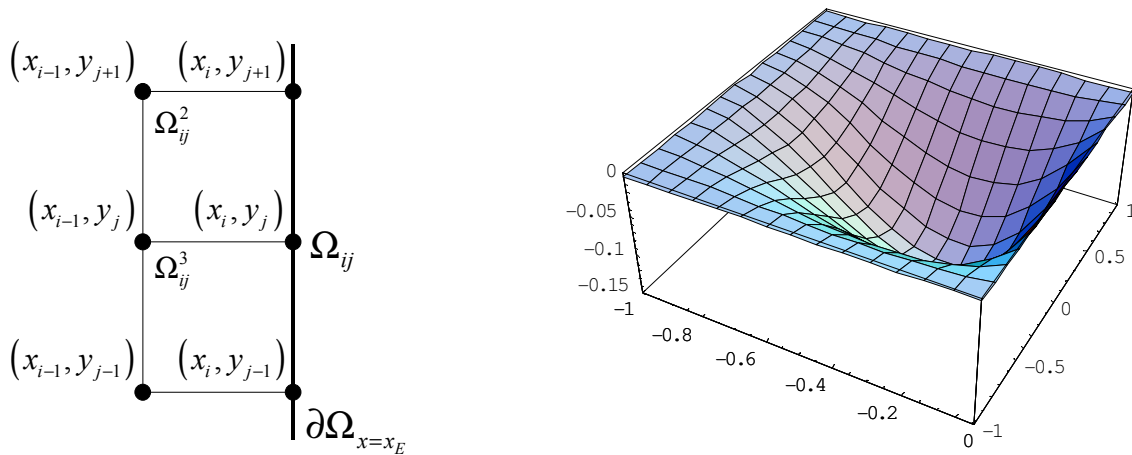


Figura A.8.- Subdominio $\Omega_{E_x j} = [x_{E-1}, x_E] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$ -izquierda- y la función de base $v_{E_x j}^1(x, y)$ asociada en $\partial\Omega_{x=x_E}$ -derecha-.

A.2.3.3. - Nodos en el segmento $y = y_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $y = y_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_i, y_0) con $i = 1, \dots, E_x - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $v_{i 0}^2(x, y)$, la que aproxima la primera derivada parcial de la función con respecto a y , ya que se conoce el valor de la función y el de su primera derivada parcial con respecto a x . Pero solamente se trabaja

con una parte de $v_{i0}^2(x, y)$, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{i0}^1 y Ω_{i0}^2 , es decir, $\Omega_{i0} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_0, y_1]$. Véase la figura A.9.

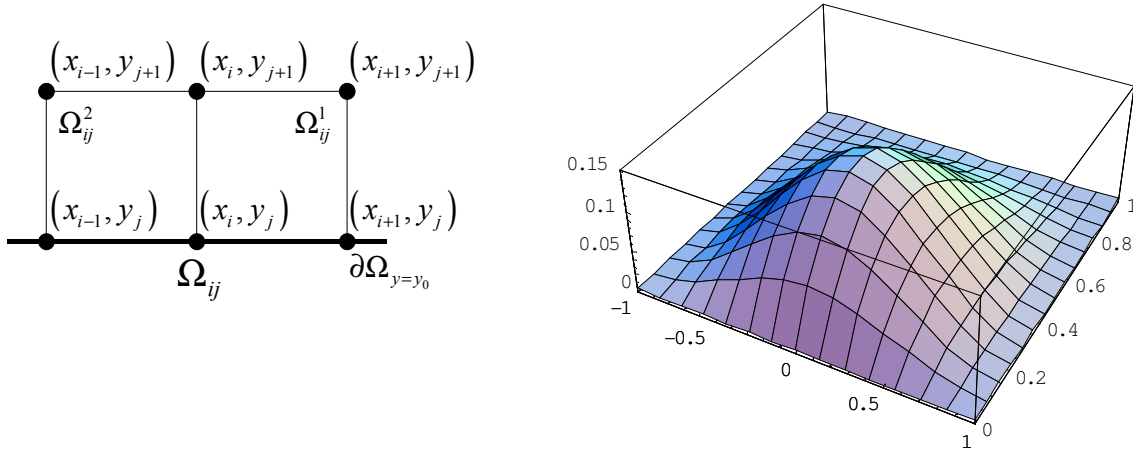


Figura A.9.- Subdominio $\Omega_{i0} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_0, y_1]$ -izquierda- y la función de base $v_{i0}^2(x, y)$ asociada en $\partial\Omega_{y=y_0}$ -derecha-.

A.2.3.4. - Nodos en el segmento $y = y_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $y = y_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_i, y_E) con $i = 1, \dots, E_x - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $v_{iE_y}^2(x, y)$, la que aproxima la primera derivada parcial de la función con respecto a y , ya que se conoce el valor de la función y el de su primera derivada parcial con respecto a x . Pero solamente se trabaja con una parte de $v_{iE_y}^2(x, y)$, la que se encuentra ubicada en los subdominios $\Omega_{iE_y}^3$ y $\Omega_{iE_y}^4$, es decir, $\Omega_{iE_y} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{E-1}, y_E]$. Véase la figura A.10.

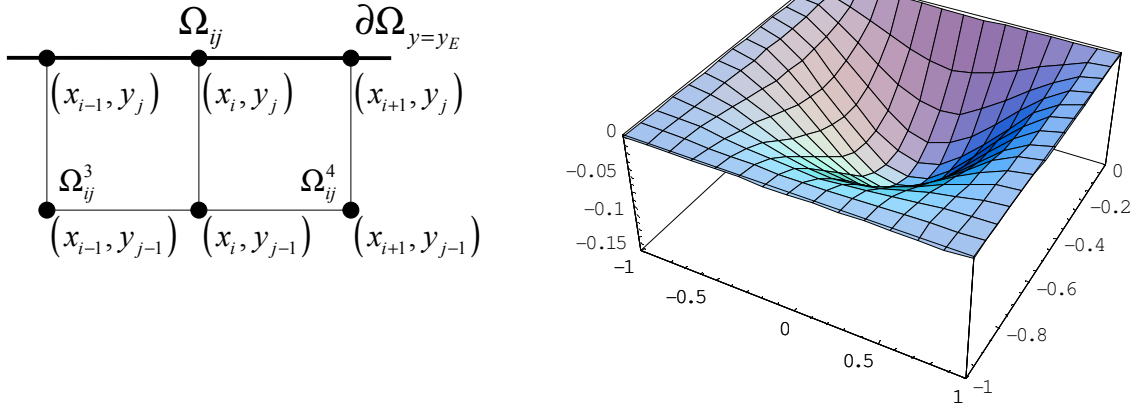


Figura A.10.- Subdominio $\Omega_{iE_y} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{E-1}, y_E]$ -izquierda- y la función de base $v_{iE_y}^2(x, y)$ asociada en $\partial\Omega_{y=y_0}$ -derecha-.

A.3. - Aproximación de las funciones óptimas de peso

Las funciones de peso $w_{ij}(x, y)$ se construyen con polinomios bi-cúbicos por tramos en Σ y polinomios bi-cuadráticos por tramos en el interior de cada subdominio $\Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Existen tres tipos de funciones de peso como en el caso de las funciones de base. Esto es:

$$w_{ij}^0(x, y) = \begin{cases} w_{ij}^{01}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{01}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_j, y_{j+1}] \\ w_{ij}^{02}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{02}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_j, y_{j+1}] \\ w_{ij}^{03}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{03}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i][y_{j-1}, y_j] \\ w_{ij}^{04}(x, y) = H_i^0(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{04}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}][y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

$$w_{ij}^1(x, y) = \begin{cases} w_{ij}^{11}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{11}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] \\ w_{ij}^{12}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{12}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] \\ w_{ij}^{13}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{13}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] \\ w_{ij}^{14}(x, y) = H_i^1(x)H_j^0(y) + C_{ij}^{14}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

$$w_{ij}^2(x, y) = \begin{cases} w_{ij}^{21}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{21}L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_i, x_{i+1}] [y_j, y_{j+1}] \\ w_{ij}^{22}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{22}L_{i-1}(x)L_i(x)L_j(y)L_{j+1}(y) & , [x_{i-1}, x_i] [y_j, y_{j+1}] \\ w_{ij}^{23}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{23}L_{i-1}(x)L_i(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_{i-1}, x_i] [y_{j-1}, y_j] \\ w_{ij}^{24}(x, y) = H_i^0(x)H_j^1(y) + C_{ij}^{24}L_i(x)L_{i+1}(x)L_{j-1}(y)L_j(y) & , [x_i, x_{i+1}] [y_{j-1}, y_j] \\ 0 & \text{otro} \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

donde $H_i^0(\bullet)$ y $H_i^1(\bullet)$ son polinomios cúbicos de Hermite y $L_i(\bullet)$ son polinomios lineales de Lagrange apropiadamente escalados en $[x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$ y C_{ij}^{mn} son parámetros que se calculan apropiadamente. Véase las figuras A.4, A.5 y A.6.

A.3.1. - Construcción de $w_{ij}(x, y)$ con Colocación

Cuando se construye la función $w_{ij}^m(x, y)$ con colocación, ésta debe satisfacer a la ecuación diferencial adjunta homogénea **solamente** en los puntos gaussianos en cada uno de los subdominios $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Puesto que $w_{ij}(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cuadráticos en el interior Ω_{ij}^n , se requiere de 1×1 punto gaussiano en cada subdominio Ω_{ij}^n .

Entonces, para $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene:

$$L^* w_{ij}^{m1} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.36})$$

donde $x^* = x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que $y^* = y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_j, y_{j+1}]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m1} en cada subdominio Ω_{ij}^1 .

Para $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene:

$$L^* W_{ij}^{m2} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.37})$$

donde $x^* = x_i - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; mientras que $y^* = y_j + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_j, y_{j+1}]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m2} en cada subdominio Ω_{ij}^2 .

Para $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene:

$$L^* W_{ij}^{m3} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.38})$$

donde $x^* = x_i - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m3} en cada subdominio Ω_{ij}^3 .

Para $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene:

$$L^* W_{ij}^{m4} \Big|_{(x^*, y^*)} = 0 \quad (\text{A.39})$$

donde $x^* = x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$ es el punto gaussiano del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$; mientras que $y^* = y_j - \frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})$ es el punto gaussiano del intervalo $[y_{j-1}, y_j]$. Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m4} en cada subdominio Ω_{ij}^4 .

A.3.2. - Construcción de $w_{ij}(x, y)$ con FEM

Cuando se construye la función $w_{ij}^m(x, y)$ con FEM, ésta debe satisfacer la integral de la ecuación diferencial homogénea ponderada con las funciones de peso locales en cada subdominio $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$, $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$, para $i = 1, \dots, E_x - 1$, $j = 1, \dots, E_y - 1$. Puesto que $w_{ij}^m(x, y)$ se aproxima con polinomios bi-cuadráticos en el interior Ω_{ij}^n , se requiere de una función de peso local en cada subdominio Ω_{ij}^n .

Entonces para $\Omega_{ij}^1 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^1 = L_i(x)L_{i+1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) \quad (\text{A.40})$$

Véase la figura A.6. Ahora, la función $w_{ij}^{m1}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A^* \langle w_{ij}^{m1}, W_{ij}^1 \rangle = 0 \quad (\text{A.41})$$

donde $A^* \langle w, W \rangle$ se define como $\langle Q^* w, W \rangle = \int L^* w W d\underline{x}$ integrado por partes, es decir:

$$A^* \langle w_{ij}^{m1}, W_{ij}^1 \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (\nabla w_{ij}^{m1} \bullet \underline{a} \bullet \nabla W_{ij}^1 - W_{ij}^1 \underline{b} \bullet \nabla w_{ij}^{m1} + c w_{ij}^{m1} W_{ij}^1) dy dx \quad (\text{A.42})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m1} en cada subdominio Ω_{ij}^1 .

Para $\Omega_{ij}^2 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_j, y_{j+1}]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^2 = L_i(x)L_{i-1}(x)L_j(y)L_{j+1}(y) \quad (\text{A.43})$$

Ahora, la función $w_{ij}^{m2}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A^* \langle w_{ij}^{m2}, W_{ij}^2 \rangle = 0 \quad (\text{A.44})$$

donde:

$$A^* \langle w_{ij}^{m2}, W_{ij}^2 \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left(\nabla w_{ij}^{m2} \cdot \underline{a} \cdot \nabla W_{ij}^2 - W_{ij}^2 \underline{b} \cdot \nabla w_{ij}^{m2} + c w_{ij}^{m2} W_{ij}^2 \right) dy dx \quad (\text{A.45})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m2} en cada subdominio Ω_{ij}^2 .

Para $\Omega_{ij}^3 = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^3 = L_i(x) L_{i-1}(x) L_j(y) L_{j-1}(y) \quad (\text{A.46})$$

Ahora, la función $w_{ij}^{m3}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A^* \langle w_{ij}^{m3}, W_{ij}^3 \rangle = 0 \quad (\text{A.47})$$

donde:

$$A^* \langle w_{ij}^{m3}, W_{ij}^3 \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\nabla w_{ij}^{m3} \cdot \underline{a} \cdot \nabla W_{ij}^3 - W_{ij}^3 \underline{b} \cdot \nabla w_{ij}^{m3} + c w_{ij}^{m3} W_{ij}^3 \right) dy dx \quad (\text{A.48})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m3} en cada subdominio Ω_{ij}^3 .

Para $\Omega_{ij}^4 = [x_i, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_j]$ se tiene lo siguiente. Sea la función de peso local:

$$W_{ij}^4 = L_i(x) L_{i+1}(x) L_j(y) L_{j-1}(y) \quad (\text{A.49})$$

Ahora, la función $w_{ij}^{m4}(x, y)$ debe satisfacer la siguiente condición:

$$A^* \langle w_{ij}^{m4}, W_{ij}^4 \rangle = 0 \quad (\text{A.50})$$

donde:

$$A^* \langle w_{ij}^{m4}, W_{ij}^4 \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\nabla w_{ij}^{m4} \cdot \underline{a} \cdot \nabla W_{ij}^4 - W_{ij}^4 \underline{b} \cdot \nabla w_{ij}^{m4} + c w_{ij}^{m4} W_{ij}^4 \right) dy dx \quad (\text{A.51})$$

Las integrales se resuelven por cuadratura gaussiana (por ejemplo con 3×3 puntos gaussianos). Con lo anterior se establece una ecuación con una incógnita C_{ij}^{m4} en cada subdominio Ω_{ij}^4 .

A.3.3. - Casos espaciales: nodos en la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos que se encuentran sobre $\Sigma \cap \partial\Omega$ tienen asociada solamente una función de peso, en lugar de las tres funciones de peso que tienen asociadas los nodos que se encuentran en el interior de Ω . Situación similar a las funciones de base. Esto se detalla a continuación.

A.3.3.1. - Nodos en el segmento $x = x_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $x = x_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_0, y_j) con $j = 1, \dots, E_y - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de peso $w_{0j}^1(x, y)$. Pero solamente se trabaja con una parte de ésta, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{0j}^1 y Ω_{0j}^4 , es decir, $\Omega_{0j} = [x_0, x_1] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$. Véase la figura A.7.

A.3.3.2. - Nodos en el segmento $x = x_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $x = x_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_E, y_j) con $j = 1, \dots, E_y - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $w_{Ej}^1(x, y)$. Pero solamente se trabaja con una parte de ésta, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{Ej}^2 y Ω_{Ej}^3 , es decir, $\Omega_{Ej} = [x_{E-1}, x_E] \times [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}]$. Véase la figura A.8.

A.3.3.3. - Nodos en el segmento $y = y_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $y = y_0$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_i, y_0) con $i = 1, \dots, E_x - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $w_{i0}^2(x, y)$. Pero solamente se trabaja con una parte de ésta, la que se encuentra ubicada en los subdominios Ω_{i0}^1 y Ω_{i0}^2 , es decir, $\Omega_{i0} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_0, y_1]$. Véase la figura A.9.

A.3.3.4. - Nodos en el segmento $y = y_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$

Los nodos ubicados en el segmento $y = y_E$ de la frontera exterior $\partial\Omega$ son (x_i, y_E) con $i = 1, \dots, E_x - 1$. Estos nodos solamente tienen asociada la función de base $w_{iE_y}^2(x, y)$. Pero solamente se trabaja con una parte de ésta, la que se encuentra ubicada en los subdominios $\Omega_{iE_y}^3$ y $\Omega_{iE_y}^4$, es decir, $\Omega_{i0} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] \times [y_{E-1}, y_E]$. Véase la figura A.10.

